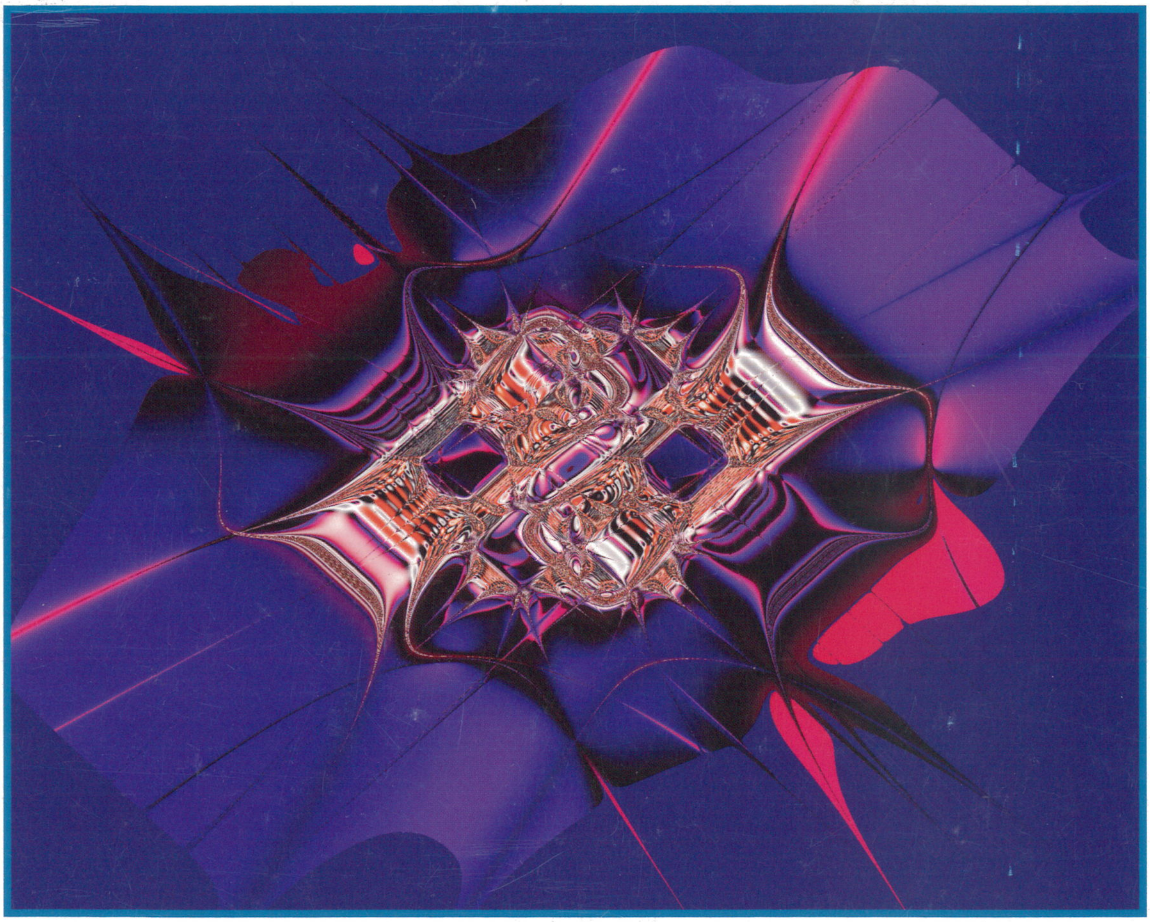
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年8月1日発行　第46巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

# 数理科学

8
2008

## 特集　数の魅力
### 秘められた深遠なる美と無限





No.542

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 542 August 2008

# 数の魅力
## 秘められた深遠なる美と無限







表紙：戸川 隼人

特集／数の魅力

# 巻頭言

足立　恒雄

本誌の編集者から「数の魅力」という特集号の取りまとめを依頼されたとき，近頃の記事が少し専門にわたり過ぎるから，易しく読めるような特集を出したいという意図を説明された．

数の魅力と言うと，素数の分布，完全数などの話題，あるいは $e$ や $\pi$ などの個々の超越数の話題を集めることが期待されていると思われるのだが，そうしたごく普通の話題ばかりでは平凡に過ぎるのではないかと考え，話題を広く渉猟することにした．その結果，今回の特集は私の趣味が色濃く出たと言えよう．それは，佐藤真理人さんの『一と多』，林知宏さんの『ライプニッツと数，量，無限』など，個々の数の魅力よりも，それぞれの文明，時代における数の考察を求めたことにも現れている．とりわけ，数学系の雑誌に西洋哲学における一者と存在の問題が正面から取り上げられたのは初めてのことではないだろうか．

同じよくある話題にしても，公田藏さんの『四元数』は，ハミルトンの発見（発明？）に始まり，歴史的な展開が緻密に調べられて，ベクトル解析の先駆けであったことを知るのである．また日本における四元数の話題にまでわたる貴重な記事である．竹之内さんには同じ $\pi$ の話題でも，『和算における円周率』という見地から書いていただいた．

寺井伸浩さんの『ピュタゴラス数』は，新しい見地からこの古代の数が扱われていて，想いの他の読み物となっており，平凡な話題なので心配したのは杞憂であった．

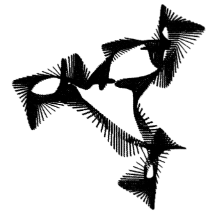
伊藤公久さんの『アボガドロ数とその今日的省察』を読めば，アボガドロ数が（高校で習ったような）1モルに含まれる分子の個数といった平凡な意味にとどまるものではなく，新しい解析学の開拓をも要求する，深い概念であることを数学関係者は知って驚くのではないだろうか．また秋山さんの『Pisot 数』は，定義は簡単だが，自己相似性という「自然の美」の本質にまで迫る概念であることを知る．思いもかけぬところに関連性が生じる，数学の面白さがここにも現れて感激的である．さらに，塩川さんの『フィボナッチ数と超越数』には種々の超越数の間の関係が渉猟されていて，超越数について該博なまとめを得ることができる．

最後になったが，大貫義郎さんの『3とクォーク』は3という素数がどうも宇宙の神秘のカギを握る数らしいことを暗示していて，素数の話が好きな私にはうれしい話題である．この世界が3次元であるというのも何か深い意味があるのでしょうね．ついでながら，7が一番尊崇された素数で，3がそれに続き，5はさほど重要視されていないというのが私の説だが，5は10の因数であるのがあまり大事にされない理由なのではないだろうか．

私のような不勉強な人間が，居ながらにして，こうした深遠な話題に接することができて，大変幸せであったというのが原稿を通読させていただいた感想である．読者もきっと同様な感想を持たれるに違いない．相談にあずかった方々の名前を一々記すことはしないが，まとめてお礼申し上げる次第である．

（あだち・のりお，早稲田大学理工学術院）

# 一と多
## 西洋哲学における存在論的思想



佐藤 真理人

### 1. 序

西洋哲学の根本部門は存在論 (ontology) であると言われている．アリストテレス以来, 存在としての存在を考察する「第一哲学」が, 自然学 (physics) を超える「形而上学」(metaphysics)[*1)] として理解されてきたのである．時代の推移とともに哲学は多様化し複雑化したが, 存在論の隆盛は今日でも変わっていない.「存在とは何か」は哲学の根本問題なのである．

### 2.「存在」の曖昧性

それにしても,「存在」は実に曖昧な概念である.「存在」を動詞にして「ある」と言いかえてみると, あるには「～がある」と「～である」の2種類があることがわかる．例えばデカルトの有名な言葉「われ思う, ゆえにわれあり（私は考える, ゆえに私がある)」を英語で言えば "I think, therefore I *am*." であり,「デカルトは哲学者である」は "Descartes *is* a philosopher." である．2つの be 動詞の機能は全く異なる．前者はわれが実在することを意味し，これが「がある」としての存在（狭義の存在）である．後者はデカルトについての本質規定をなす働きをしており，これが「である」としての存在である．名詞化すればいずれの be 動詞も being となり字面だけでは区別がつかない．ところで両者の関係を考えてみると,「である」が語られるときはすでに「がある」(実在) が想定されている, つまり何ものかの「がある」を前提してそれの規定を行うのが「である」であると言える．したがって「である」は存在すること自体をではなく, 存在様相, つまり存在の仕方 (あり方) を表すのである．あるいは構造と考えてもよいかもしれない．

さらに,「人間は社会的存在である」というように,「存在」はしばしば「存在するもの」(哲学では「存在者」と表現することが多い) をも表す．存在とは何ものかが存在するということであるから, 必然的に存在するもの (存在者) をも意味することになる．英語の場合も being が存在者をも意味することは, 改めて説明する必要もないであろう．

このように「存在」にはさしあたり3種の意味がある．これだけでもすでに十分に曖昧であるが, 哲学ではさらに「存在一般」とか「存在そのもの」を問題にすることによって, 事態はいっそう込み入ってくる.「存在とは何か」という哲学の根本的な問いは, 実は特にこのレベルの存在に関わっているのである．

存在一般とは個別的存在を超えた全体的存在である．それを存在者全体という意味での「世界」あるいは「自然」として理解することもできよう．我々日本人にとっては「自然」が, 存在一般とし

*1) physics は現代的な意味では「物理学」であるが, 古典的な意味では physis の研究, つまり天文学から化学, 医学までも含む「自然」一般の研究であって,「自然学」という訳語が適切である．

て受け入れやすい観念であると思われる．

このレベルでも存在と存在者（およびその存在の仕方）の議論をすることは可能であり，存在の哲学者と呼ばれるハイデッガーの存在論的思想においては重要な問題である．しかし私見では，このレベルでは存在と存在者を区別する思考には原理的限界がある．というのは，我々は世界の中に存在するのであって，世界の外部から世界をまとまりある有限な対象として規定することは不可能であろうからである．だからこそカントは，全体としての世界は実在としては与えられず，理念でしかないと言ったのである．「存在者」とはつまるところ意識の対象となったものであり，有限な対象とならないものは一定の存在者として限定され得ない．絶対的全体のレベルでは存在者全体とその存在を区別して論じても，単に言葉の上だけの議論で終わり，実質的に得るものはないであろう．世界を宇宙として考えればそれは明らかであろう．要するに，存在者の全体が存在一般であり，存在一般と存在者一般とは一つのものである．私はそのように解して，このレベルでは曖昧であると同時に含蓄ある「存在」という言葉で済ませることにしたい．実際，過去の哲学者たちもそうしてきたのである．

## 3. 一者としての存在と神

西洋存在論の原型は古代ギリシアのエレア派の哲学者クセノファネスとパルメニデス（前6–5世紀）の思想に見られる．彼らは究極の実在として一にして全なる存在を考えた．ヘン・カイ・パーン（一にして全なるもの），永遠の一者というこのイメージはその後の存在論の歴史を通じて保たれるものである．パルメニデスが語っている存在は文法的には「あるもの」，「存在者」（ト・エオン）であるが，個別的存在者ではなく全一体としての存在者であって，それゆえ上記の理由からして「存在」と解する．そのような不生不滅，不変不動の存在を説いたパルメニデスに対し，後の存在論が生成や流出や弁証法的展開という動的要素を存在に加味したとしても，永遠の一者が根底にあるという前提は変わらずに保持されていると言える．

ところで，一者としての存在は神の観念と重なるものである．パルメニデスは存在を神と呼んでいないが，クセノファネスは明確に「一者は神である」と言っている．西洋哲学の伝統の中では存在＝神という一般的前提があることを知る必要がある．ギリシア哲学と中世哲学の狭間にあって，のちの哲学に大きな影響を与えた3世紀の新プラトン主義哲学者プロティノスは，永遠の一者である神からの万物の流出を説いた．その影響の下で，中世哲学では神は「存在そのもの」（esse ipsum）と考えられたのである．

中世哲学における存在即神の思想のもう一つの背景は『旧約聖書』「出エジプト記」（3章14節）の記述である．預言者モーセがシナイ山で神から十戒（ユダヤ民族の根本的戒律）を授かるのだが，その際，神に名を問うモーセに対し，神は「我はありてあるものなり」*2) と答える．要するに神は，自分は「存在する者」であると言っているのである．中世哲学研究の大家ジルソンが言うように，存在が神の固有名であり，神の本質を表している．

こういう二重の背景により，西洋哲学では神こそが万物に存在を与える存在の根源，絶対的存在であるという暗黙の前提ができ上がった．かくして「存在」の多義性にもう一つ特別の際立った意味が加わるわけである．存在は神の代名詞なのである．それゆえ，明白な無神論者の場合は別として，一般に西洋の哲学者が重々しく存在を語るとき，その背後に神が想定されていると考えてまず間違いはない．20世紀の存在の哲学者ハイデッガーも例外ではない．彼は，es gibt ～（～がある）というドイツ語（英語の there is/are ～に相当する）における非人称主語 es は「存在そのもの」であると言っている．つまり，～がある，ということは，存在そのものが～を与える，ということなのである．その存在そのものを神以外のものとして

*2) 古代哲学では自然を構成する「アルケー」（始源，根源）をいろいろと考えたが，多くは何らかの物質的元素の集合離散で自然を説明した．いわゆる「四大」（地水火風）がそれである．「エレメント」はそういう含みをもつ語である．

考えることができるであろうか？

だが人格神の信仰と存在論的思想とが素直に調和するようには思えない．ギリシアの存在論は明らかに汎神論（pantheism）の性格をもっている．汎神論とは神を世界ないし自然の全体と同一視する考え方であり，洋の東西にわたって昔からある一つの典型的な思想類型である．西洋近代では「神即自然」と主張したスピノザが汎神論者として有名である．汎神論的神は内在的に自然と一体化しているという意味で，超越神ではなく内在神である．また汎神論的神は自然であるがゆえに人格神ではない．すなわち神は愛したり憎んだりするような人間的なものではなく，自然の法則や摂理として働くのである．他方，中世哲学の土台をなしているキリスト教（広くはユダヤ・キリスト教的ヘブライズム）の神観は狭義の「有神論」（theism）である．有神論的神の特徴は，人格的な意志をもって世界を創造した超越神であることである．自然は神の被造物であるがゆえに神とは別物である．本来のキリスト教からすれば，神と自然を一体化させる汎神論は無神論に通じるものである．西洋思想の水面下では常にこの有神論と汎神論との対立・緊張が続いているように思われる．というのは，キリスト教的世界観に何らかの違和感をもつ思想家は程度の差はあれ自然（世界，宇宙）に活路を見出そうとし，必然的に汎神論的傾向をもつに至るからである．例えば近代ではモンテーニュ，ルソー，ゲーテ，シェリング，ニーチェにその傾向が見られるし，ヘーゲルも弁証法的ダイナミズムを取り入れた汎神論と言えるし，ハイデッガー，ヤスパース，メルロ＝ポンティら現代圏の存在論的哲学者にも汎神論的要素は明らかにある．端的に言えば，汎神論的な神とは哲学者の神である．パスカルが哲学者の神を拒否して「アブラハムの神，イサクの神，ヤコブの神」を求めたのは敬虔なクリスチャンとして自然な態度であったのである．これは結局，存在としての神と人格としての神との対立と言えよう．両者は容易には調和し得ない根本的異質性をもっているのではないか．

## 4. 一なる存在と多なる存在者

次に，存在の問題を一と多という観点から考えてみよう．

存在論は存在を一者として，また一性として考えようとする．それに対し，個別的なもろもろの存在者は必然的に多である．そしてそこで重要なことは，哲学者たちにとって多様・雑多な存在者の領域は不完全な，非本来的な，真ならざる世界として映ったということである．確かに，あらゆるものが生成消滅する変転常なき無常な世界の中に絶対的なものはない．真の実在，絶対的存在を求める思索は，雑多な存在者の領域を超えた彼方に存在そのものを求めたのである．こういう思考様式は古代以来今日においても変わっていないと言える．

ただしここで断っておかねばならないが，存在が一であるというとき，その一は 1, 2, 3 ⋯ という数のレベルにおける一ではない．諸存在者の領域を超えるということは，数の領域を超えるということであって，一者の一は数的な一ではないとされる．要するに，存在そのものは数的に表現され得ないのだが，あえて表現すれば一としか言いようがないということであろう．

さて，現代の存在論的思想の代表的なものは，フッサールの現象学的思考方法を存在論に適用した，ハイデッガーおよびその系統の「現象学的存在論」である．現象学の説明をここで詳しくすることはできない．とりあえず意識に現れてくる対象を偏見なく純粋に把握しようとする立場と考えていただきたい．現象学的存在論の基本的な立場を簡潔に表すならば，世界あるいは存在は存在者において自らを示す，ということになる．現象学者たちは個々の存在者において見え隠れする存在について様々な，しばしば神秘的な調子で語りながらそれに到達しようとする．しかしその結果はどうであろうか？

私の見るところでは，存在の探求は，存在の内に深遠な意味を想定する探求者の意に反して，存在を何らかの無差別的な質料（素材）の集塊として表象し，語らざるを得ない結果になる．それは

存在の量的表象あるいは存在の質料化と言ってよい事態である．つまり，存在が一である，数を超えた一である，ということは，結果として，存在は量であると言うに等しくなるのである．存在一般を語る場合，それが存在者全体のイメージと不可分であるがゆえに，それを量的な集合体として表象することを余儀なくされる．語られる存在はなるほど分裂を超えた一である．だがそれは，文法的に言えば，物質名詞や抽象名詞の場合と同じく，質料的集合体を表す量的単数である．そしてその存在一般の部分的表象として個別的具体的存在を考えることになる．存在は存在者において自らを示すとはまさにそのことである．

ハイデッガーによれば，es gibt Sein（存在がある）とは，es（＝存在そのもの）が［具体的な］存在を与える，ということである．これは全体としての存在がおのれの部分を与えるという量的な表象に他ならない．ジャン・ヴァールやサルトルに見られるように，この文をフランス語で表現すればil y a de l'êtreとなり，部分冠詞（量を表す不定冠詞）を用いることになり，量的表象がいっそう明瞭となる．

ハイデッガーの影響を強く受けつつ，より感覚的，具体的に存在を考えるメルロ＝ポンティは，存在一般を「世界」，「自然」，「エレメント」（脚注2）参照），「イリヤ」*3) 等の言葉で表しているが，最終的に「肉」という異様な語で存在を示すようになる．「われわれが肉と呼んでいるもの，内部で加工されているこの塊（かたまり）（masse）はいかなる哲学においても名称を有していない」と言われる．これはまさに対象化されない存在＝存在者の全体である．メルロ＝ポンティが存在を単なる物質的なものとしてではなく，何か神的なものと考えていることは確かである．ハイデッガーに似た彼の意味深長な存在の語りはそのことを強く意識させる．けれども，神的存在を語ろうとする哲学的言語はその目的を達しているようには思われない．存在

*3)　イリヤとは，英語の there is，ドイツ語の es gibt に相当するフランス語の非人称表現 il y a である．それをそのまま名詞として用い，「〜がある」の「〜が」を取り去った純然たる「ある」（存在一般）を表している．この語はメルロ＝ポンティよりもむしろエマニュエル・レヴィナスの用語として知られている．

は否応なく何か物質的な集合体として語られざるを得ないのである．事実メルロ＝ポンティは存在を「塊」と呼んでいるではないか．

他方，同じく現象学を方法としながら，神を否定するサルトルの存在論では，存在の量的表象が露骨に明らかとなる．彼も存在に関して masse（塊，集塊），massif（塊（かたまり）的）という形容をしている．そして小説『嘔吐』でサルトルは，次のように自らの存在体験を主人公アントワーヌ・ロカンタンに語らせている．「存在が突然ヴェールを脱いだ．存在は抽象的カテゴリーの無害な様相を失った．それは事物の練り粉そのものであり，この〔マロニエの樹の〕根は存在の中で捏ね上げられていた．あるいはむしろ，根，公園の鉄柵，ベンチ，芝生の薄い草，こうしたすべてのものが消失した．事物の多様性，事物の個別性は，外観，うわべのニスでしかなかった．そのうわべのニスが溶け，残ったのは化け物じみた，柔らかい，無秩序な塊――裸の，ぞっとするような淫猥な剥き出しの塊だけだった」．「私は叫んだ．『なんたる汚物，なんたる汚物！』そして私はこのべたべたした汚物を振り払うために身を揺さぶった．しかし汚物は頑として離れなかった．そして多量の汚物が，幾トンもの存在が無限にあった」．練り粉，塊，多量の汚物，幾トンもの存在といった表現は量的，物質的表象以外の何ものでもない．

いずれも現象学的方法を用いながら全く異なる存在論になるのは腑に落ちないが（おそらく現象学以前の存在観があるのだろう），存在の量的表象という点では共通している．無神論者サルトルは吐き気を催す存在の実相を自信を持って暴き出したが（それが真であるかどうかは別として），メルロ＝ポンティの「肉」としての存在は，辛うじて温かみのある生きた実在という雰囲気を感じさせるものの，その内実は未知のままである*4)．ハイデッガーの「存在」はあたかも空気のごとく曖昧である．あたかも古代ギリシアの存在論に戻ったかのようである．存在はソクラテス以前の地水火風のごとき元素のようなものに，あるいはアリストテレスが事物の根底に想定した形相（けいそう）なき「第一質料」のようなものになる*5)．

結局，現象学的存在論は存在そのものに突き進もうとして，そこに到達したと思った瞬間に，存在を質料化することによって，存在を取り逃がしてしまっているのではないか．それは，はっきり言って，思考の根本的挫折である．その意味では，ヤスパースが存在を求めつつも伝統的な存在論とも現象学とも一線を画して，存在探究の挫折とその挫折におけるある種の存在経験を説くことの方が，またレヴィナスが存在論を拒否して「存在の彼方」に神を求めることの方が，より素直な態度であると言えよう．

現象学的存在論が我々にもたらした成果は，存在そのものについての知よりもむしろ，存在に至る手前で開示された，諸存在者（人間，生物，事物）の存在構造や本質規定や意味連関にこそあると言うべきであろう．そのレベルでは現象学的存在論は生産的であり，特に人間の「世界内存在」の分析は多くの有益な認識をもたらした．

いずれにせよ，西洋存在論は，一と多の対立，キリスト教的な神観念との矛盾，物質的な言語表現の不十分さで，悩んでいるように思われる．だが存在の思索が西洋哲学の歴史の中で実り豊かな副産物を産み出してきたことも確かなことである．

*4) フランスにおける次の世代の代表的な現象学的存在論者として M. アンリ，J.-L. マリオンがいるが，彼らは「現われざるもの」の現象学を展開するに至る．それは，汎神論的存在を超えて，それゆえ現象学を超えて，再び超越神に向かう動向を示しているように思われる．

*5) 形相とは英語では form であり，質料に形を与える本質のことである．形相がないということは現実性がない，したがって実生活上では無のごときものであるが，存在論的哲学者たちは形相なき質料の領域を単なる無と考えるのではなく，むしろあらゆる可能性を秘めた濃密なカオス（混沌）と見ているのではないかと思われる．無と言われるとしても，それは無限定（indefinite）としての無であって，無が即ち絶対的存在なのである．西田幾多郎が「絶対無即絶対有」と言うのもそういう意味においてである．

## 参考文献

1) 少々難しいかもしれないが，存在の思想の多面的展開の理解には，ヤスパースの『形而上学』（『哲学』第3巻，創文社）が役立つ．
2) パルメニデスその他の初期ギリシア哲学を数学者の視点から簡潔に解説したものとしては，ラッセルの『西洋哲学史』（みすず書房），『西洋の知恵』（社会思想社）を読むのがよいであろう．

（さとう・まりと，早稲田大学文学学術院）

# ライプニッツと数，量，無限

林　知宏

## 1. はじめに

ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ（1646–1716）は，微分積分学の発展に決定的な貢献をもたらした人物として知られる．接線を見出す計算を通じて微分法のアルゴリズム化を達成し，いち早く公表した（1684 年）．また記号 $dx$，$\int$，「関数」(functio)，「座標」(coordinata)，「超越的」(transcendens) といった用語を導入した点も特筆に値する．

微分法・積分法以外にも確率論，数論，方程式論，幾何学（「位置解析」(analysis situs)），2 進法計算，（四則演算を可能にした）計算器の開発にも取り組んだ．そして究極的には，こうした各々の数学に共通するエッセンスを抽出して，一つの基礎学問を確立するという「普遍数学」(mathesis universalis) 構想を抱いていた．さらにその上に，数学のみならず全学問を統合・再編した体系づくりのための基礎学問「普遍学」(scientia generalis) 建設を目指したのだった．数学だけに限定されないスケールの大きな学問構想が，広く哲学史の中でも光彩を放っている．19 世紀後半以降その評価は高まりつつ，現在に至っているといえよう．

ここでまずわれわれが関心を寄せるのは，数学論文ではなく，『人間知性新論』(*Nouveaux essais sur l'entendement humain*) という著作である．1704 年頃完成したが，没後 1765 年まで刊行されることがなかった．主として哲学畑の人々が研究対象に取り上げることが多い．だが，ライプニッツの数学・自然学研究の成果を背景とした記述をあちらこちらに見ることができるので，数学史の観点からも興味深い著作である．これはイギリスの思想家ジョン・ロック（1632–1704）が 1690 年に出版した『人間知性論』(*An Essay concerning Human Understanding*) の内容に反論する形で書かれている．そのためライプニッツは，ロックの著書の内容に逐次対応するよう項目を立てる．そしてロックの立場を代弁するフィラレートとライプニッツの代弁者テオフィル，その両者の対話形式で議論を進めている．第 2 巻第 16 章「数について」，17 章「無限について」の記述を見ていくことにしよう[*1]．

## 2. ライプニッツ『人間知性新論』における数，量，無限

### 2.1 「数について」

数は数学の最も根本にある対象である．それをロック，ライプニッツはどのように捉えるのだろうか．ロックは普遍的観念である最小単位（1）の

*1）ロックの主張は，ライプニッツ『人間知性新論』内のフィラレートの発言だけでなく，ロック『人間知性論』の記述も適宜加味していく．ロックに関しては [Locke 1975], pp.205–223（邦訳 [ロック 1972–77]（二），77–108 頁）．ライプニッツのテキストは，[Leibniz A], VI-6, S.155–159（邦訳 [ライプニッツ 1993]，172–178 頁）参照．ただし，他の引用も含めて，翻訳は既刊のものを変更する場合がある．なお〔 〕内の語句は，引用者の補足である．

集成であるとする．その結果，数の観念は「正確で区別可能である」と述べる．ライプニッツはこの素朴な規定に対して，自己の数学上の貢献を背景に異を唱える．すなわちロックの規定は整数のみが想定されており，もっと広範囲に数というものを了解するべきであるという．以下はテオフィルの発言である．

> 分数，無理数，超越数や二つの整数の間に見出すことができるすべてのものを含んだ範囲の中で，数は整数とは異なり，線と比例関係にあり，連続体の場合と同様，そこに最小というものがありません．それゆえ数は単位の集まりであるという，この〔ロックの〕定義は整数においてのみ成り立ちます．〔中略〕大きさを判明に認識するには，整数，もしくは整数を介して知られる別のものに訴えねばなりません．かくして大きさについて判明な認識を持つには，連続量から離散量に訴える必要があります．

ライプニッツがこのように述べるとき，われわれにはさほど違和感がないだろう．だがわずかな引用の中に様々な発展の段階の痕跡が読み取れる．ロックは単に数を単位とその反復によって形成されると見なす．ロックの数概念は基本的に「数える」ことに対応している．すなわち，感覚によって把握可能な事象に由来している．経験論的な観点の本質である．彼の『人間知性論』には，アメリカ原住民の場合が引き合いに出される．20まで数えられるが，1000まで数えることができない，したがって判明な数の観念を持たない例を紹介している*2)．ロックの見解とライプニッツとは，やはり何段階かの差異がある．すなわち，

1) 連続量の中に，無理量に加えて超越量も含まれる．
2) 離散量としての数と，連続量とが概念的に統合される（一般量化）．
3) 一般量をあらためて数として把握する．整数の間に異なるカテゴリーの数がさしはさまれる．
4) 連続量も単位をもとに，離散化することで大きさを捉える．

ライプニッツの認識は，われわれの素朴な実数概念と変わらない．数直線上の原点と特定の点の間にある長さという量が，連続量としての実数の描像である．加えて，先の引用にあるように，連続量の大きさを把握するためには単位を設定した上で，離散量に訴えるのも同じである．

ロックとライプニッツ，17世紀後半をともに生きた二人に横たわる数概念の違いは，両者の数学に対する係わりと関係する．「数の概念の明晰さが論証に必要である」とロックは述べる．ただ，その数が整数に限定されるならば，もはや素朴すぎる認識と言わざるを得ない．数学がこの間拡大してきた領域をも視野に入れた上で発言することが，ライプニッツのロック批判の要点である．数学は論証学問の代表選手である．一定の整合性を保ちながら，旧来のカテゴリーにない数を組み入れることに抵抗はなくなっていた．ここで記号代数こそが数概念変化の担い手である．ライプニッツの思考様式は，エルンスト・カッシーラーの用語で「シンボル的思考」と称されるべきものである*3)．数学史の観点から重要なことは，一般的，統一的に量を把握し，数概念の拡大へと反映させたことが，実数とその連続性をどのように明晰に捉えるか．また次の問題へと駆り立てる要因になったということである．ライプニッツ以降，19世紀に至るまで，数学の基礎における問題として重要な課題となっていくであろう．ライプニッツ自身の表明は，その先端に位置するものである．

---

*2) ロックは理由として言語の乏しさを挙げている．ある多数性を表現するための「名前」が必要であるとしている．

*3) エルンスト・カッシーラーは自らの用語「シンボル的思考」を次のように定義づけている．「シンボル的思考の本性は，思考内容そのものを操作するのではなく，それぞれの思考内容に特定の記号を対応づけ，この対応づけの力を借りて，複雑な証明の連鎖，すべての項をただ一つの公式にまとめ上げ，それらすべての項を一目で分節された総体として捉えることを可能にしてくれる濃縮化を果たすことにある」．[カッシーラー 1989–97]，(四)，206f 頁参照．

### 2.2 「無限について」

先の 2.1 項の引用のとおり，ライプニッツは数についてロックの素朴な経験論を大きく踏み越えていた．彼の立場は，『人間知性新論』の続く「無限について」の章でより鮮明になる．テオフィルは次のように語る．

> 正確に言えば，無限に多くの事物がある，すなわち，それを指定し得る以上に多くの事物，というのが本当です．しかし真の全体として考えると無限数（nombre infini）もなければ無限の線も他の無限量（quantité infinie）もありません．それを証明するのは容易です．〔中略〕厳密な意味での真の無限は，絶対的なものの中にしかありません．それはあらゆる複合に先立ち，部分を加えることによって形成されません．

先の拡張された数概念に照らしても，この引用は興味深い．ライプニッツによれば，無限は数でも量でもないのである．無限を実在するものとは決して考えていない．ライプニッツ以前の中世において支配的であったアリストテレスの教説に同調しているようにも見える．また「真なる無限」が絶対者（＝神）のみに存するという発想（「絶対的なものは神の属性に他なりません」）も，当時の宗教観から自然なものであろう．ロックの代弁者フィラレートが「精神が自分の空間観念を新たな付加によって際限なく拡げる能力，これは常に同じであって，精神はまさにそこから無限な空間の観念を引き出す」のではないかと問う．するとテオフィルは（無限に広がる）絶対空間を（有限な）「部分から合成された一つの無限全体として思い描いても誤りを犯すことになる」，と語らせている．ライプニッツの主張の要点は，無限が感覚経験に由来しないということである．まさにロックの観点と最も異なる点である[*4)]．では，ライプニッツは無限を神の領域に押し込めて事足れりとするのか．そうではない．もしライプニッツの言明がそこに留まるのであれば，われわれの関心を引きつける対象には成り得ないだろう．彼は自己の数学研究の収穫への目配りを忘れない．なぜなら数学の世界ではすべてが経験的把握から構成されないからである．ここに無限を了解する道は残されている．

> 無限な全体と，その対極をなす無限小は，幾何学の計算においてしか通用しません．ちょうど代数学における虚根と同様です．

テオフィルがこのように述べるとき，われわれには次の問題が喚起される．

1) ライプニッツは幾何学の計算（＝曲線にまつわる微分積分学）でどのように無限，あるいは無限小を「通用」させていたのか，
2) 代数学における虚根と「同様」とはどのような意味においてか[*5)]．

私はライプニッツの数学的貢献を考えるとき，これら二つの問いに共通する要素が含まれていると思う．それはすでに一度掲げた「シンボル的思考」である．数や量といったカテゴリーには属さない無限（または無限小）が，なぜ数学において利用される可能性を持つのか．ギリシア以来受け継がれてきた，数学の正統的・伝統的な枠組をも踏み越えたライプニッツの独自の境地と見なせる．彼の思考の担い手は記号である．冒頭でも紹介したように，現在においても普及している $dx$, $\int$ という記号は彼が作り出した．それらは単に計算上，使いやすい記号として，ライプニッツ以前に用いられていたものと置き換わった以上の意味を持っているように見える．そこで『人間知性新論』を離れて，ライプニッツを際立たせるこの特徴について，特に 2）の観点から論じることにしよう．

---

*4) ライプニッツの『人間知性新論』のフィラレートの発言は，ロックの立場すべてを述べているのではない．ロックは「空間の無限」と「無限の空間」を区別するよう注意を促している．すなわち前者は，好きなだけ反復することで想定可能であるのに対し，後者は全体をあたかも「現実に眺めることを想定し」ているために矛盾をきたしているとする．また数の無限についても，「絶えず終わりなく拡大し，進行し，心の思惟が到達できない」観念であると述べている．

*5) 前者の問いに対しては，[林 2003] 第 3 章 3.3 項で，ライプニッツの無限小概念とそれに関する論争を分析した．後者に関しても [林 近刊] において論じた．

## 3. ライプニッツ独自の思考法

### 3.1 17 世紀の代数的思考法（デカルトが切り開いた道）

デカルト『幾何学』（1637 年刊）第 3 巻において，3 次方程式の一般論が展開される．もともとデカルトは，図形の問題を方程式に帰着させるという方法論を確立していた．そのために表現手段として，必要な洗練された代数記号を整えていた．ただしその処理は，最終的に実根を線分の長さとして作図・表示することを目指す．具体的には 2 次曲線（円と放物線）を組み合わせることで実現する．その過程で，想定される虚根（デカルト自ら racine imaginaire と名づけた）は，当然線分表示の対象からはずされる．（$\sqrt{-1}$ のように）平方根の中に負の量が入り込む場合，「目に見えるようにする」手段までデカルトは与えなかった．デカルトの方法論的革新は，数学史上に大きな進展をもたらした．ただ題名にあるとおり，あくまでも図形的処理を伴う「幾何学」の展開に留まっている*6)．代数記号によって示された 3 次方程式の一般解，すなわちカルダノの公式は，どんな量に対しても一般的に成立するはずである（とわれわれならば考える）．だがライプニッツに先立つ 17 世紀の数学者たちは，必ずしもそう考えなかった．やはりデカルトの代数記号が表象するものをどのように認識するかが問題であったのである．

ライプニッツが 1675 年に記したと考えられる手稿「3 個の根を持つ立方方程式の解法について」では，3 次方程式に対するカルダノの公式をめぐってデカルト批判が展開されている．いま 3 次方程式を次のように与える．

$$y^3 \pm qy - r = 0. \qquad (1)$$

カルダノの公式によれば，(1) の解の一つは，

$$y=\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}} \qquad (2)$$

のようになる．このとき得られる根が実根であっても，(2) において $\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}$ が虚量になる場合がある（例えば，$y^3-13y-12=0$ に対して，$y=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}=4$）．このような事態をどのように了解するか．17 世紀の数学者は悩んだ．虚量の介入によって実量が得られることを，カルダノの公式の有効性に限界があると捉えた．しかしライプニッツの考えはきわめて明瞭である．「表現に関しては，デカルトの思惑とは違って，カルダノのもの〔3 次方程式の公式〕こそ最も簡単であり，最も一般的であり，ありとあらゆる場合を含んでいる」と断言する*7)．

ライプニッツはカルダノの公式の一般的成立をきわめて形式的に示す．3 乗根内の $\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}$ について，根号の中の正負は代数計算の中ではまったく考慮する必要がないと考えている．虚「量」として，あくまで実の量と同様に実在との対応にこだわることなくとも，論証の展開が無矛盾であれば正当性を主張できるとしている．ライプニッツは，数学研究を通じて徐々にこうした思考法を獲得していったというより，もともと記号を利用する思考を好んでおり，数学の中に大きな応用の場面を見出していた*8)．

虚量を数学的対象として上手に組み入れること．それを果たすためにデカルトの切り開いた道の先に，さらに新たな発想上の拠点が作られようとしていた．ただし当のライプニッツ自身がそう単純に進んで行かなかったのである．

### 3.2 ライプニッツの錯誤（オイラーへと至る道）

ライプニッツは，1702 年に有理量 $\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\cdots}{\lambda+\mu x+\xi xx+\pi x^3+\cdots}$ の積分について論文を発表している．こうした量は，（現代的な記法を用いると）分母 $f(x)=\sum a_i x^i = 0$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$ の根（実根，虚根かを問わない）$\alpha_i$ に対して，$f(x)=$

*6) [Descartes AT], VI, pp.442–476, 邦訳 [デカルト 2001], 51–74 頁.

*7) [Leibniz A], VII-2, S.687, 邦訳 [ライプニッツ 1997], 188 頁.

*8) われわれが確認できる最初期の段階において，ライプニッツの記号に対する嗜好はすでに明確である．例えば，20 歳の段階（1666 年）で執筆された『結合法論』は，典型的な例を提供してくれる．後の数学研究に繋がっていく要素を [林 2003] 第 1 章で分析した．

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$ と1次因子の積に直し，部分分数に分解した上で積分を考えることになる．いわば「代数学の基本定理」に相当する内容を有理量の積分の議論に適用している（翌1703年の論文では，重根を含む場合も検討している）．一般に $n$ 次式が1次因子に分解されることは，デカルトを含めた17世紀の数学者には既知の事項であった．したがってライプニッツのオリジナリティは，求積の問題，「すべての有理量の求積は，双曲線の求積と円の求積に帰着できるか」という問題に結びつけたところにある．例えば，4次式 $x^4-1$ に対して，$x^4-1=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ である．このとき，

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=-\int\frac{dx}{4(x+1)}+\int\frac{dx}{4(x-1)} -\int\frac{dx}{2(xx+1)} \qquad (3)$$

となる．したがって (3) の右辺第1項，第2項は双曲線の求積に帰着し，第3項は円の求積に帰着する．このような変形があらゆる有理量の積分に対して可能かを問う．そこでライプニッツは，より一般的に $\int\frac{dx}{x^4+a^4}$ を考える．分母を1次因子に分解すると，

$$\begin{aligned}x^4+a^4&=\left(xx+aa\sqrt{-1}\right)\left(xx-aa\sqrt{-1}\right)\\&=\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\\&\quad\times\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\end{aligned} \qquad (4)$$

となる．ところがライプニッツは，この (4) の四つの項のどの二つを組み合わせても実平方因子を作ることができないと誤った結論を与えてしまった[*9]．実際，

$$\sqrt{\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},$$
$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

となることをわれわれは違和感なしに受け入れる．すると複号の上側をとれば，

$$\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)=x^2+\sqrt{2}ax+a^2$$

のようにライプニッツに向かって容易に反論できるはずである．

ライプニッツは，虚量を一つの記号として受け入れ，数学的な議論の中で破綻なく運用されればよいとした．まさしく「シンボル的思考」の力を借りて，虚量を数学的な対象の中に組み入れる論理を示した．ライプニッツの独自の境地である．だが $\sqrt{\sqrt{-1}}$ を同じように記号操作して，$\sqrt{-1}$ によって表現可能と了解できなかったのかもしれない．自分自身の発想に徹底できなかったように見える．ライプニッツのそうした微妙な心理は，1702年の論文中に記された次の発言に垣間見ることができる．

> 実際，永遠の多様性の始祖である自然界の本性，あるいは神の精神とでも呼ぶべきものは，自身のきわめて美しい多様性に執着していて，すべてを一つの類の下に閉じ込めることを許さない．それゆえ，自然は美しくも驚くべき脱出法（effugium）を，虚根と称される解析における奇跡，観念世界の怪異，存在と非存在にまたがるもののうちに見出した．（下線引用者）

すでに紹介したように，『人間知性新論』で真の無限は，絶対者（＝神）の中にのみあると述べていた．数学は，唯一無限を何らかの形で通用させる手段を備えているとされ，虚根との対比が語られていた．いまの引用はどうだろう．ライプニッツが，神・自然・人間知としての数学，これらの関係をどのように考えていたかを実によく示している．虚根は「存在と非存在にまたがる」脱出法である．ある種の柔軟な発想といえよう．だが数学的結果を導く上で，まだ中途半端な了解に留まっていたのではないか．それが修正されるためには，もう一段ハードルを越えることが必要だったのだろう．一朝一夕にすべてができあがってしまうわけではない．

ライプニッツの論文から半世紀近く経た1748

*9) [Leibniz GM], I, S.350–361, 邦訳, [ライプニッツ 1999], 207–229 頁.

年，レオンハルト・オイラー（1707–1783）は，数学史上に名を残す著作『無限解析入門（*Introductio in analysin infinitorum*）』を刊行した．オイラーは，その第1巻，第29項で変化量 $z$ の関数 $Z$ に対して，$Z=0$ として方程式の根を探し，根 $z=f$, $z=g$, $z=h,\cdots$ をもとに「単純因子」（$=1$ 次式 $k+lz$）への分解 $(z-f)(z-g)(z-h)\cdots$ が可能であることを主張する．ただし単純因子は，実量だけでなく虚量も含む．ただし虚量を含む因子（虚因子）は必ず偶数個発生することが述べられている．ここまではライプニッツ以前に見出されていたことの確認である．だが第31，32項において，ライプニッツがつかみそこなったことに明瞭に解答を与えている．すなわち，

- $Q$ が4個の単純虚因子の実の積とすると，この積 $Q$ は2個の二重実因子（$=2$ 次の実量のみからなる因子）に分解される（第31項），
- $z$ の整関数 $Z$ が，たとえどんなに多くの個数の単純虚因子を持つとしても，つねに2個ずつの因子を組み合せて，それらの積が実量のみからなる因子にすることができる（第32項）．

とオイラーは説明する．より一般的な第32項では，「たとえ〔第31項と〕同じ証明を一層高い次数のベキに及ぼすことはできないにしても，任意個の虚因子に対しても同様の性質が成立すること，したがって $2n$ 個の単純虚因子の位置に $n$ 個の二重実因子を置き換えることはつねに可能である．そうしたことは明らかである．このためあらゆる $z$ の整関数は，実の単純因子，あるいは二重因子に分解することができるだろう」と述べている*10)．こうしたオイラーの推論を「厳密性にこだわりがない」と批評するのはたやすい．私には，むしろライプニッツが悩んだ（と思われる）虚量の問題がある種の哲学，認識論の問題から切り離された一場面として記憶に値するように思う．

以上のオイラーの議論には，ライプニッツが抱えていた「存在と非存在にまたがるもの」として虚量を特別視する様子が微塵もない．単なる記号的計算の合理性のもとで，きわめて形式的な処理が行われている．あまりにもあっさりと進められるので，オイラー以前の数学者が悩んだことは，いったい何であったのかと思うほどである．「オイラーには哲学がない」という声を時に聞くが，それは良くも悪くも的はずれではない．数学の問題解決に哲学など不要である．現代の数学者はそう言うに違いない．ただ私は，存在論への微妙なこだわりを残していたライプニッツに思い入れを持ってしまう．ライプニッツにとって，すべての有理量の求積が，2種類の求積（双曲線と円の求積）に帰着するかどうかが考えるべき問題であった．その中で虚量を扱うことに関して自己の「シンボル的思考」を徹底させることができなかった．それは曲線下の求積という具体的な描像になお囚われていたからであろう．数学の問題を考えつつ，他の領域にも通じる思考法との間を揺れ動いていたように見える．オイラーにはその揺れがない．数学内部における合理性が，より徹底して追求される．だからこそ虚量の存在論的な認識など，もはや入り込む余地がないのだろう．

ライプニッツは，無限（あるいは無限小）の問題を数学の中で処理していくための記号法，アルゴリズムを作り上げた．記号を利用した思考法を最大限活用することで，ライプニッツの数概念，量概念を同時代人から際立たせることができた．特に虚量との対比で何かを考えることは，数学的対象に対して存在論的議論を薄めていくことに大いなる貢献があったといえる．少なくともデカルトに比して，その事は確実である．ただすべてが簡単に，単純に了解されてしまうわけではない．1702年の論文における誤りは，虚因子をめぐってなお何らかの「心理的ハードル」がライプニッツの中に潜んでいたことを浮かび上がらせる．その点が実に興味深い．同時に相応の歴史的な文脈を踏まえなければ，オイラーの著作の真価も見えてこないだろう．まさしく数学史の醍醐味が確認できたのではないだろうか．

---

*10)　[Euler 1748], I, p.3–19, 邦訳 [オイラー 2001], 1–21 頁.

## 参考文献

### 1 次資料，翻訳を含む

[Descartes AT]　*Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery ($1964–1974_1$) (Paris: J. Vrin, 1996).

[Euler 1748]　Euler, Leonhard, *Introductio in analysin infinitorum*, Vol.I, II ($1748_1$) (Bruxelles: Culture et Civilisation, 1967) (rep.).

[Leibniz A]　*Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Berlin: Akademie Verlag, 1923–).

[Leibniz GM]　*G.W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt ($1849–1863_1$) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).

[Locke 1975]　John Locke, *An Essay concerning Human Understanding*, edited by Peter H. Nidditch (Oxford: Clarendon Press, 1975).

[オイラー 2001]　オイラー，レオンハルト『オイラーの無限解析』，高瀬正仁訳（海鳴社，2001 年）.

[デカルト 2001]　『デカルト著作集』1『幾何学』他 原亨吉 他訳（1973 年 $_1$）（白水社，2001 年）（増補復刊）.

[ライプニッツ 1993]　『ライプニッツ著作集』4『認識論』上，谷川多佳子・福島清紀・岡部英男訳（工作舎，1993 年）

[ライプニッツ 1997]　『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』，原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳（工作舎，1997 年）.

[ライプニッツ 1999]　『ライプニッツ著作集』3『数学・自然学』，原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長嶋秀男訳（工作舎，1999 年）.

[ロック 1972–77]　ロック，ジョン『人間知性論』（一）～（四），大槻春彦訳（岩波文庫，1972–77 年）.

### 2 次文献

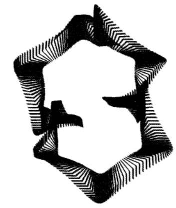
[カッシーラー 1989–97]　カッシーラー，E.『シンボル形式の哲学』（一）～（四），木田元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1989–97 年）.

[林 2003]　林　知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）.

[林 近刊]　林　知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，酒井潔編『ライプニッツを学ぶ人のために』（世界思想社，近刊）所収.


（はやし・ともひろ，学習院高等科）

# ピュタゴラス数



寺井　伸浩

## 1. はじめに

直角三角形の直角を挟む2辺の長さを $a, b$，斜辺の長さを $c$ とすると，

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (*)$$

が成り立つ．これを**ピュタゴラスの定理**（または三平方の定理）と言う．ピュタゴラスの定理は，人々に最もよく知られた数学の定理であり単純で有用で美しい．学生時代に定期試験や入試の幾何の問題でこの定理をうまく使って良い点を取った人も多いだろう．上の関係式 $(*)$ を満たす正の整数 $a, b, c$ の組を**ピュタゴラス数**と言う．また，$(a, b, c) = 1$ のとき（つまり $a, b, c$ が1以外の公約数をもたないとき），正の整数 $a, b, c$ を**原始**ピュタゴラス数と言う．

本稿では，上の関係式 $(*)$ を数論的立場で考察し，ピュタゴラス数を次の3つの観点で解説する：

**(i)** ピュタゴラス数を行列から作る．
**(ii)** ピュタゴラス数のパラメーター表示．
**(iii)** 指数型不定方程式の整数解．

本稿を読んでピュタゴラス数の面白さ・不思議さを実感し，ピュタゴラス数を通して現代の最先端の不定方程式論の一部を読者に分かって頂ければ幸いである．

## 2. ピュタゴラス数を行列から作る

まず，ピュタゴラス数 $(a, b, c)$ から新しいピュタゴラス数 $(a', b', c') = (a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c)$ が作られることを示そう．実際，簡単な計算で

$$(a + 2b + 2c)^2 + (2a + b + 2c)^2 - (2a + 2b + 3c)^2$$
$$= a^2 + b^2 - c^2$$

となる．

上の関係は行列で表したほうが見やすい．すなわち，

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

上の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を繰り返し掛けることにより，任意のピュタゴラス数から次々と新しいピュタゴラス数が無数に得られることを上の関係式は示している．

例えば，最小のピュタゴラス数 $(3, 4, 5)$ からは次が得られる（表1参照）：

**表1** 最小のピュタゴラス数 $(3,4,5)$ から得られる新しいピュタゴラス数 $(a,b,c)$

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 21 | 20 | 29 |
| 119 | 120 | 169 |
| 697 | 696 | 985 |
| 4059 | 4060 | 5741 |
| 23661 | 23660 | 33461 |

これらの例はすべて直角三角形の直角を挟む2辺の差が1，つまり $a-b=\pm 1$ である．このようなピュタゴラス数は，すべて上のように ${}^t(3,4,5)$ に $A$ のベキを掛けることによって得られることが知られている．（行列 $A$ の1行と2行を入れかえることと $a,b$ を入れかえることは同値である．）

このことを簡単に説明しよう．

$$a^2+b^2=c^2, \quad a-b=\pm 1$$

とする．これから，

$$(2a\mp 1)^2-2c^2=-1$$

が成り立つ．**ペル方程式**の理論より，

$$2a\mp 1+c\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^m,$$

ここで $m$ は3以上の奇数であることに注意する．このとき，$m=2n+1\,(n\geq 1)$ とおき

$$2a_n\mp 1+c_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})$$

（また $a_n-b_n=\pm 1$）とすると，

$$a_n^2+b_n^2=c_n^2, \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を容易に導ける．（ただし，$(a_0,b_0,c_0)=(3,4,5)$ とする．）

一方，ピュタゴラス数 $(5,12,13)$ や $(15,8,17)$ は ${}^t(3,4,5)$ にどんな行列を掛ければいいか？

一般に，すべての原始ピュタゴラス数は $A$ の他に2つの行列

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を用いれば同様に得られる．つまり，次が成り立つ．

**定理**（Hall[Ha]） すべての原始ピュタゴラス数は，${}^t(3,4,5)$ に3つの行列 $A,B,C$ によって生成される行列を掛けることにより得られる．

例えば，

$$B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$ACB^2A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3115 \\ 3348 \\ 4573 \end{pmatrix}.$$

上の定理より，原始ピュタゴラス数の解の構造は “tree” になっていることが分かる．3つの行列 $A,B,C$ をそれぞれ掛けることにより，最小解 ${}^t(3,4,5)$ から3本の枝に分かれる，またそれぞれから3本の枝に分かれる，というように無限に “tree” になっている．

この解の “tree” の構造は，有名な**マルコフ方程式**

$$a^2+b^2+c^2=3abc$$

の解の構造に似ている．マルコフ方程式の正の整数解 $a,b,c$ を**マルコフ数**と言う．マルコフ数の最初の数項は次の通りである（$a\leq b\leq c$）：

$$(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,2,5),\ (1,5,13),\ (2,5,29)$$

**定理**（Markov） すべてのマルコフ数 $a,b,c$ は，次の操作を繰り返すことにより最小解 $(1,1,1)$ から得られる；$(a,b,c)\mapsto(b,c,3bc-a)$, $(a,b,c)\mapsto(a,3ac-b,c)$, $(a,b,c)\mapsto(a,b,3ab-c)$.

## 3. ピュタゴラス数とアイゼンシュタイン数のパラメーター表示

一つの内角が $120^\circ$ である三角形で，$120^\circ$ を挟む2辺の長さを $a, b$, 他の辺の長さを $c$ とすると，余弦定理より

$$a^2+ab+b^2=c^2$$

が成り立つ．この等式を満たす正の整数 $a, b, c$ の組を**アイゼンシュタイン数**と言う．$(a,b,c)=1$ のとき，$a, b, c$ を**原始**アイゼンシュタイン数と言う．

原始ピュタゴラス数と原始アイゼンシュタイン数は次のように類似のパラメーター表示をもつ (表2参照)：

**定理 (1)** 原始ピュタゴラス数 $a, b, c$ は次のように与えられる．

$$a=u^2-v^2, \quad b=2uv, \quad c=u^2+v^2,$$

ここで $u, v$ は，$(u,v)=1, u \not\equiv v \pmod 2), u>v$ である正の整数である．($a, b$ の取り方は逆でもよい.)

**(2)** 原始アイゼンシュタイン数 $a, b, c$ は次のように与えられる．

$$a=u^2-v^2,\ b=v(2u+v),\ c=u^2+uv+v^2,$$

ここで $u, v$ は，$(u,v)=1, u \not\equiv v \pmod 3), u>v$ である正の整数である．($a, b$ の取り方は逆でもよい.)

**表2** ピュタゴラス数．アイゼンシュタイン数．

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 5 | 12 | 13 |
| 7 | 24 | 25 |
| 9 | 40 | 41 |
| 11 | 60 | 61 |
| 13 | 84 | 85 |
| 15 | 8 | 17 |

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 5 | 16 | 19 |
| 7 | 33 | 37 |
| 8 | 7 | 13 |
| 9 | 56 | 61 |
| 11 | 85 | 91 |
| 13 | 35 | 43 |

上のパラメーター表示の求め方について，(有理整数の範囲での) 因数分解の方法以外によく知られた2通りの方法の概略を示そう．

2次体を用いる方法

**(1)** 2次体 $K=\mathbb{Q}(i)$ (ただし $i^2=-1$) を用いる．$K$ の整数環 $O_K$ では素因数分解の一意性が成り立ち，単数は $\varepsilon=\pm1, \pm i$ である．与式を $O_K$ で分解すると，$(a+bi)(a-bi)=c^2$. 左辺の因子は $O_K$ で互いに素なので

$$a+bi=\varepsilon(u+vi)^2$$

とおける．両辺の係数を比較すると，上のパラメーター表示を得る．

**(2)** 2次体 $L=\mathbb{Q}(\omega)$ (ただし $\omega$ は1の原始3乗根) を用いる．$L$ の整数環 $O_L$ では素因数分解の一意性が成り立ち，単数は $\varepsilon=\pm1, \pm\omega, \pm\omega^2$ である．与式を $O_L$ で分解すると，$(a-b\omega)(a-b\bar{\omega})=c^2$ (ただし，$\bar{\omega}$ は $\omega$ の共役)．左辺の因子は $O_L$ で互いに素なので

$$a-b\omega=\varepsilon(u-v\omega)^2$$

とおける．そのとき $\omega^2+\omega+1=0$ に注意すると，

$$a-b\omega=\varepsilon\{(u^2-v^2)-(2uv+v^2)\omega\}.$$

両辺の係数を比較すると，上のパラメーター表示を得る．

2次曲線を用いる方法

**(1)** 与式の両辺を $c$ で割り，$x=a/c, y=b/c$ とおくと**単位円**

$$C_1: \quad x^2+y^2=1$$

となる．ピュタゴラス数 $a, b, c$ を求めるためには，$C_1$ 上の**有理点** ($x$ 座標，$y$ 座標がともに有理数である点) を求めればよい．次のようにして求められる．

$C_1$ 上の有理点 P と点 A$(-1,0)$ を通る，傾き $t$ の直線 $l$ の方程式は

$$l: \quad y=t(x+1)$$

である (図1)．$l$ と $C_1$ の方程式を連立させて解くと，点 P の (点 A 以外の) 座標は

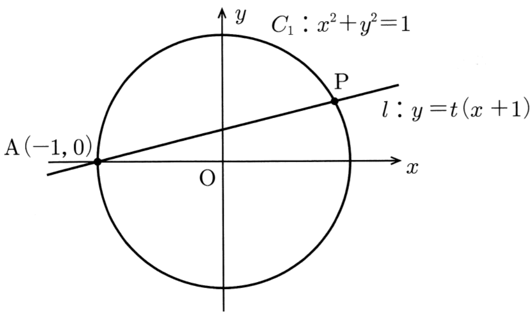



**図1**　円 $C_1$ と直線 $l$ の交点.

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

である．ここで，$t$ が有理数ならば $x,y$ も有理数で，逆に $x,y$ が有理数ならば $t=\frac{y}{x+1}$ も有理数である．$t=\frac{v}{u}$ とおくと，$a,b,c$ のパラメーター表示が得られることが分かる．

**(2)**　与式の両辺を $c$ で割り，$x=a/c, y=b/c$ とおくと**楕円**

$$C_2:\quad x^2+xy+y^2=1$$

となる．アイゼンシュタイン数 $a,b,c$ を求めるためには，$C_2$ 上の有理点を求めればよい．(1) と同様，$l$ と $C_2$ の方程式を連立させて解けばよい．∎

ピュタゴラス数のパラメーター表示をクリフォード代数の視点から論じた文献 [Kj] はとても興味深いので参照されたい．

最後に，アイゼンシュタイン数がピュタゴラス数と類似の性質をもつもう一つの例として次を述べる：

120° の角を挟む 2 辺の差が 1 であるアイゼンシュタイン数，つまり，

$$a^2+ab+b^2=c^2,\quad a-b=1$$

の正の整数解は

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4&3&4\\ 3&4&4\\ 6&6&7\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 8\\ 7\\ 13\end{pmatrix}$$

で与えられる．

例えば，

$$(a,b,c)=(8,7,13),(105,104,181),\\ (1456,1455,2521).$$

上の関係式は，ピュタゴラス数の場合と同様，ペル方程式

$$(2c)^2-3(2a-1)^2=1$$

に帰着されるので簡単に導ける．

## 4. 指数型不定方程式に関する予想

この節では，ピュタゴラス数から派生した指数型不定方程式に関する多くの予想を紹介する．フェルマー系の予想とジェスマノビッチ系の予想に分けて述べる．

### 4.1 フェルマー系の指数型不定方程式

**予想 1（Generalized Fermat's Conjecture）**　$p,q,r\geq 2$ を整数とする．このとき

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$$

ならば，一般化されたフェルマー方程式

$$x^p+y^q=z^r \tag{F}$$

は，次のようないくつかの例を除いて，互いに素な整数解 $x,y,z\neq 0$ をもたない．

$1^n+2^3=3^2\,(n>6)$, $2^5+7^2=3^4$,

$7^3+13^2=2^9$, $2^7+17^3=71^2$,

$3^5+11^4=122^2$, $17^7+76271^3=21063928^2$,

$1414^3+2213459^2=65^7$,

$9262^3+15312283^2=113^7$,

$43^8+96222^3=30042907^2$,

$33^8+1549034^2=15613^3$.

$p=q=r>3$ のとき，予想 1 は**フェルマー予想**と呼ばれるが，これはワイルズにより 1995 年に証明された．フェルマー予想の数学的解説やその解決に至るまでの波乱の歴史に興味ある読者は，足立恒雄 [A1, A2]，サイモン・シン [Ss] を参照されたい．また，$x=1$ のとき，予想 1 は**カタラ**

**ン予想**と呼ばれるが，これもミハイレスクにより2002年に証明された．つまり，$X, Y, M, N$ を2以上の整数とするとき，不定方程式

$$X^M - Y^N = 1$$

は，ただ一つの整数解 $3^2 - 2^3 = 1$ をもつことが示されたわけである．このように指数型不定方程式の二大難問が最近になってやっと解決されたが，3つの指数 $p, q, r$ がすべて異なる予想1を証明するのは（現時点では）極めて困難であろう．

一般化されたフェルマー方程式 (F) は上に示したようないくつかの（小さい）例外的な解をもつが，予想1において方程式 (F) が整数解 $x, y, z \neq 0$ をもたないための条件

$$(\mathrm{C}_1): \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$
$$(\mathrm{C}_2): \quad (x, y, z) = 1$$

は本質的である．

実際，$(\mathrm{C}_1)$ または $(\mathrm{C}_2)$ が成り立たないとき，(F) は整数解 $x, y, z \neq 0$ をもつ場合がある．

$(\mathrm{C}_1)$ で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ のとき，つまり，

$$(p, q, r) = (2, 2, r),\ (2, 3, 3),\ (2, 3, 4),\ (2, 3, 5)$$

のとき，(F) がそれぞれの場合に無数の解をもつことが知られている．例えば，$(p, q, r) = (2, 2, 2)$ のとき，(F) の解は“ピュタゴラス数のパラメーター表示”で与えられる．

しかし，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ のとき，つまり，

$$(p, q, r) = (2, 3, 6),\ (2, 4, 4),\ (3, 3, 3)$$

のとき，“フェルマーの無限降下法”により (F) は解をもたないことが示されることを注意しておく．

$(\mathrm{C}_2)$ で $(x, y, z) \neq 1$ のとき，(F) は以下のような無数の解をもつ．

$$\big((1+k^n)^{n-2}\big)^n + \big(k(1+k^n)^{n-2}\big)^n = \big((1+k^n)^{n-1}\big)^{n-1},$$
$$(1+k^n)^n + (k(1+k^n))^n = (1+k^n)^{n+1}.$$

予想1の例外的な解の最小の指数はどれも2であるから，究極の予想として次が考えられる．

**予想2**　一般化されたフェルマー方程式

$$x^p + y^q = z^r,\ p, q, r \geq 3,\ (x, y, z) = 1,\ xyz \neq 0$$

は整数解 $x, y, z, p, q, r$ をもたない．

### 4.2 ジェスマノビッチ系の指数型不定方程式

予想1の方程式 (F) では底 $x, y, z$，指数 $p, q, r$ をすべて動かして考えたが，この節では底を固定し，指数を動かした予想を述べよう．

**予想3（Generalized Jeśmanowicz' conjecture）**　$a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r$ を次を満たす固定された正の整数とする：

$$a^p + b^q = c^r, \quad p,\ q,\ r \geq 2, \quad (a, b) = 1.$$

このとき不定方程式

$$a^x + b^y = c^z \qquad \text{(J)}$$

は，次の4つの場合を除いて，ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (p, q, r)$ をもつ．

次の $a, b, c$ の各組に対し，方程式 (J) は以下に与えられた解だけをもつ．($a < b$ とする.)

$(\mathrm{J}_1)$　$(a, b, c) = (2, 3, 5)$ のとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), (4, 2, 2);$$

$(\mathrm{J}_2)$　$(a, b, c) = (2, 7, 3)$ のとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 2), (5, 2, 4);$$

$(\mathrm{J}_3)$　$(a, b, c) = (1, 2, 3)$ のとき

$$(x, y, z) = (m, 1, 1), (n, 3, 2);$$

$(\mathrm{J}_4)$　$(a, b, c) = (2, 2^k - 1, 2^k + 1)$ のとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), (k + 2, 2, 2);$$

ここで，$m, n$ は任意，$k \geq 3$ は整数とする．

$p = q = r = 2$ のとき，つまり $a, b, c$ がピュタゴラス数のとき，予想3は**ジェスマノビッチ予想**と呼ばれる．これは多くの場合に証明されているが，未解決の問題である．

**予想 4 (Bennett's conjecture)** $A, B, C$ を固定された正の整数とし，$A, B \geq 2$ とする．このとき不定方程式

$$A^x - B^y = C \tag{P}$$

は，次のような解を除いて，高々一つの正の整数解 $x, y$ をもつ．

$3-2=3^2-2^3=1,\quad 2^3-3=2^5-3^3=5,$

$2^4-3=2^8-3^5=13,\ 2^3-5=2^7-5^3=3,$

$13-3=13^3-3^7=10,\quad 91-2=91^2-2^{13}=89,$

$6-2=6^2-2^5=4,\quad 15-6=15^2-6^3=9,$

$280-5=280^2-5^7=275,\ 6^4-3^4=6^5-3^8=1215,$

$4930-30=4930^2-30^5=4900.$

上の不定方程式 (P) は**ピライ方程式**と呼ばれる．初等的方法により (J) で $x$ または $y$ が決定されるときは，不定方程式 (J) はピライ方程式 (P) を解くことに帰着される．(P) は Baker 理論および Pade 近似を用いて解かれる．

予想 1 のときと同様，予想 4 の (P) が例外的な解をもたないようにするには，指数の条件 $x, y \geq 2$ と底の条件 $(A, B) = 1$ を加えればよいであろう．

## 5. 文献について

本稿で紹介したピュタゴラス数の話題と関係する文献について，手に入りやすい和書（翻訳書）を中心に挙げる．

ピュタゴラスの定理に関連する歴史の解説については，最近出版された文献 [M] に詳しい．この本は，ピュタゴラスの定理を窓にして，古代バビロニアから今日まで四千年に及ぶ数学の発展と文化への影響をいきいきと描いている．

ピュタゴラス数やペル方程式，ガウス整数の基本的事項や楕円曲線とフェルマーの最終定理の概観を知りたい人には，文献 [Sj] を薦める．この本には数値実験例が多く，RSA 暗号の解説もある．コンピューター計算が得意で数論に興味ある人には向いている．

ピュタゴラスの定理の証明については，文献 [O] にたくさんの証明が紹介されている．2 節，3 節のピュタゴラス数やアイゼンシュタイン数に関し文献 [Si, Hi] を参考にしたが，本稿では「Hall 流の行列によるベキ表示」をしたので簡潔で美しいものが得られた．

ピュタゴラスの「謎の哲学者」としての側面に興味ある人には文献 [Sa] の一読を薦める．ピュタゴラスおよびピュタゴラス教団の数学や思想・言動が詳しく述べられている．また，この本は，ピュタゴラスを材料にして，プラトン，アリストテレス，プロティノスらの古代ギリシャの哲学の系譜を概観した本でもある．

紙数の制限で取り上げられなかったが，有理数の 3 辺を持つ直角三角形の面積となる正の整数を求める問題（合同数問題）については，文献 [Kn] に詳しい解説があるのでぜひ参照されたい．

### 参考文献


[A1] 足立恒雄（著），『フェルマーの大定理―整数論の源流』，ちくま学芸文庫，筑摩書房 (2006).

[A2] 足立恒雄（著），『フェルマーの大定理が解けた！―オイラーからワイルズの証明まで』，ブルーバックス，講談社 (1995).

[Hi] 一松信（著），『$\sqrt{2}$ の数学』，海鳴社 (1990).

[Kn] N. コブリッツ（著），上田 勝・浜畑芳紀（訳），『楕円曲線と保型形式』，Springer GTM シリーズ (2006).

[M] E. マオール（著），伊理由美（訳），『ピタゴラスの定理』，岩波書店 (2008).

[O] 大矢真一（著），『ピタゴラスの定理』，東海大学出版会 (2001).

[Sa] 左近司祥子（著），『謎の哲学者ピュタゴラス』，講談社選書メチエ (2003).

[Si] シェルピンスキー（著），銀林浩（訳），『ピタゴラスの三角形』，東京図書 (1993).

[Sj] J.H. シルヴァーマン（著），鈴木治郎（訳），『はじめての数論―発見と証明の大航海』，ピアソンエデュケーション (2007).

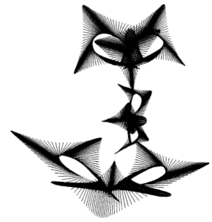
[Ss] サイモン・シン（著），青木薫（訳），『フェルマーの最終定理』，新潮文庫 (2006).

[Ha] A. Hall, Genealogy of Pythagorean triads, *Mathematical Gazette* **54** (1970), 377–379.

[Kj] J. Kocik, Clifford algebras and Euclid's parametrization of Pythagorean triples, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **17** (2007), no.1, 71–93.


（てらい・のぶひろ，足利工業大学工学部）

# 和算における円周率



竹之内 脩

## 1. 古い話から

円周の長さは，どれくらいだろうか．これは昔から人々の関心事だった．茶筒に糸を巻いて調べて見ればだいたいはわかる．直径の 3 倍をちょっと超えたくらいだ．江戸時代には，人々は 3.16 という値を使っていた．これはどういう値なのであろう．はっきりしたことはわからないが，一説には，これは $\sqrt{10}$ に近い値で，大工の使う曲尺で簡単に作れる，ということと，また他には，外国との往来にあたっていた船乗りが，インドのジャイナ教から取り入れたものであろうという．古くは，どうなっていたのであろうか．

もっとも古く，円周率 $\pi$ の値を定めようとしたのは，アルキメデス（紀元前 287 頃〜紀元前 212）とされる．彼は $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を示した．この数が，その後どのように使われていたのであろうか．ヨーロッパでは，ギリシア以来の伝統では，比を使う．われわれがするような 10 進位取り記数法を使った計算は，インド・アラビア数字の伝わった 12 世紀末以来のことで，しかも小数計算は，16 世紀末にやっとなされるようになった．

さて中国では，古くから小数計算はされていた．中国でのもっとも古い円周率の記録は，魏の時代の劉徽による『九章算術』（263）にあるもので，3.14 という値が与えられている．その後祖沖之（429〜500）は，$3.1415926 < \pi < 3.1415927$ という結果を与え，また，$\frac{22}{7}$ を疎率，$\frac{355}{113}$ を密率として与えた．これらを導いた方法はわからないのであるが，偉大な成果である．この結果がその後どのように使われていたのかわからないが，不思議なことに，元の時代の大数学者朱世傑の『四元玉鑑』（1303）では，$\frac{22}{7}$ を，冲之密率といって使っている．分数 $\frac{355}{113}$ は，日本にはいって関孝和以降，非常に活用されることになる．

なお，洋の東西を問わず，円周の長さを求めることと，円の面積を求めることは，同じ問題として扱われてきた．

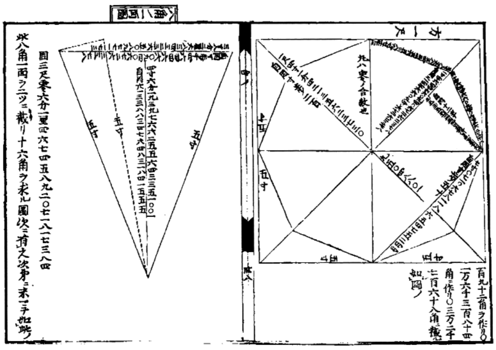
## 2. 和算の時代になって

日本にも，古い時代から数学は使われ研究もされていたであろうが，そのことについては何もわかっていない．やっと歴史が伝えるものは，17 世紀，江戸時代になってからである．この時代の円周率の研究の嚆矢をなすものは，村松茂清（1608〜1695）の『算爼』である．

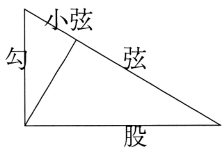
◆ 村松茂清『算爼』（1663）

村松は，図のように，中心から頂点までの距離が 5 寸の正 8 角形の周を計算し，これからはじめて，16 角，32 角，64 角と角数を次々 2 倍にしてゆき，32,768 角形までの周の長さを求めている．彼の得た 32,768 角形の周は，次の値である．

3 尺 1 寸 41592 64877 76988 69248



ここで以下のために，次のことを用意しておこう．



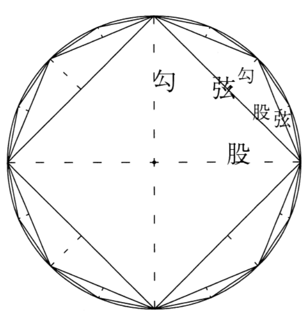

直角三角形のことを勾股弦という．そして，直角をはさむ短い方の辺を勾，長い方の辺を股，斜辺を弦という．

直角頂から弦に引いた垂線によって分けられた弦の部分のうち，勾の側の部分を小弦という．このとき，$勾^2 = 小弦 \times 弦$ である．

次に述べる関孝和の表では，はじめに環矩図というものが載せてあり，そこに勾，股，弦が細かく書き込まれている．

この図では，$勾 \times 直径 = 弦^2$ となっており，直径 $= 1$ としているので，$勾 = 弦^2$ となっている．

環矩図




◆ 関孝和『括要算法巻貞』

村松の成果は，関孝和（1640 頃～1708）に引き継がれた．この仕事は，関の死後弟子たちが出版した『括要算法』（1711）の巻貞（第 4 巻）に載っているが，関がいつこれをしたのかはわからない．1675～1680 と想像されるが，確証するものはない．関は，この計算を，正 131,072 $(= 2^{17})$ 角形までした．

四角

勾 0.5

股 0.5

弦 0.70710 67811 86547 5244 微強

周 2.82842 71247 46190 0976 微強

八角

勾 0.14644 66094 06726 2378 微弱

股 0.35355 33905 93273 7622

弦 0.38268 34323 65089 7717 強

周 3.06146 74589 20718 1738 強

·

·

·

三萬二千七百六十八角

勾 0.00000 00091 91785 3531

股 0.00009 58737 98655 3517 弱

弦 0.00009 58737 99095 9773 強

周 3.14159 26487 76985 6708 弱

六萬五千五百三十六角

勾 0.00000 00022 97946 3436 弱

股 0.00004 79368 99547 9887 弱

弦 0.00004 79368 99603 0669 弱

周 3.14159 26523 86591 3571 強

一十三萬一千零七十二角

勾 0.00000 00005 74486 5862 強

股 0.00002 39684 49801 5334 強

弦 0.00002 39684 49808 4182 強

周 3.14159 26532 88992 7759 弱

このようにして，内接正多角形の周の長さを求め，これに「定周を求む」として，下に述べる加速計算を行う．

**「定周を求む」** 32,768 角の周と 65,536 角の周との差と 65,536 角の周と 131,072 角の周との差を乗じて，これを 32,768 角の周と 65,536 角の周との差から，65,536 角の周と 131,072 角の周との差を引いたもので割る．そしてこれに，65,536 角の周を加える．そうすると，

3 尺 14159 26535 9 微弱

が得られる．これを定周となす．

これが関の述べているところであるが，式の形にすると，次のようになる．

65,536 角の周

$+$ {(65,536 角の周 $-$ 32,768 角の周) $\times$
(131,072 角の周 $-$ 65,536 角の周)} $\div$
{(65,536 角の周 $-$ 32,768 角の周) $-$
(131,072 角の周 $-$ 65,536 角の周)}

定周とは何か．いろいろ解釈があるようであるが，筆者は，これで周の値が確定した，と述べているものと考えている．

関の計算式は，書き直せば次のものである．

$$65{,}536\text{ 角の周} + \cfrac{131{,}072\text{ 角の周} - 65{,}536\text{ 角の周}}{1 - \cfrac{131{,}072\text{ 角の周} - 65{,}536\text{ 角の周}}{65{,}536\text{ 角の周} - 32{,}768\text{ 角の周}}}$$

このままでは見にくいので，現代流の式にしよう．

いま，直径 1 の円に内接する正 $n$ 角形の 1 辺の長さを $s(n)$，周の長さを $l(n)$ とする．

$$l(n) = n \cdot s(n)$$

そうすると，上の式は，$n = 32{,}768$ として，

$$l(2n) + \cfrac{l(4n) - l(2n)}{1 - \cfrac{l(4n) - l(2n)}{l(2n) - l(n)}}$$

としたものである．

さらに，$r = \frac{l(4n)-l(2n)}{l(2n)-l(n)}$ とすれば，

$$l(2n) + (l(4n) - l(2n))\frac{1}{1-r}$$
$$= l(2n) + (l(4n) - l(2n))(1 + r + r^2 + \cdots)$$

これは，関が，求める正多角形の周長の極限を，

$$l(2n) + (l(4n) - l(2n))$$
$$+ (l(8n) - l(4n)) + (l(16n) - l(8n)) + \cdots$$

という形で捉え，この和を $r$ を公比とする無限等比級数の和として計算しようとしたもの，と考えられる．

この計算は加速法と呼ばれ，今日の数値計算では普通に行われるものであるが，それをこの時代にしていることは，すばらしいことである．

### ◆ 建部賢弘(たけべかたひろ)『綴(てつ)術算経』

建部賢弘 (1664〜1739) は，関孝和の第一の高弟といわれている人である．彼は『綴術算経』(1722) という書を残している．その中で，次のことを述べている．

**1°** 関氏は，はじめの 4 角から 131,072 角までについて，各段階で，いちいち勾の平方根をとって弦の長さを求めているが，それは不必要なことである．最後の段階で一度平方根をとればよい．

**2°** 関氏は $l(2n) - l(n)$ を $n = 4$ からはじめて順につくり，その差のおのおのを前の差で割って，その極限が $\frac{1}{4}$ であることを知った．そこで自分は，増約の術を，$\frac{l(4n)-l(2n)}{l(2n)-l(n)}$ ではなく $\frac{1}{4}$ を使って行い，それを一遍約周羃とした．これについて，前と同様に差の比をつくってみると，こんどはそれが $\frac{1}{16}$ になる．それを二遍約周羃とし，次に同じことをやる．このようにして，

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{16},\quad \frac{1}{64},\quad \frac{1}{256},\quad \frac{1}{1024},\quad \cdots$$

と続ける．

関氏は増約を一遍しかやらなかったので，131,072 角形まで使ったが，私はこの方法で 1,024 角まで 40 桁計算して，次の真値を得た．

3.1415926535 8979323846 2643383279
5028841971 2

## 3. 分数 $\frac{355}{113}$

すでに上に述べているように，祖冲之は，方法はわからないが，円周率の近似分数として $\frac{355}{113}$ を与えている．これが，江戸時代に，どのようにして日本に伝わったかわからないが，ともかく算者の間で知られていた．あるいは，この祖冲之のことを述べている中国の歴史書『隋書』を読んで知っていたのかもしれない．そして，これはいったいどのようにして求めたものかが，1670 年頃には共通の問題として意識されていたようである．関は，『括要算法巻貞』で，上に述べたもののあとでこれに取り組んでいる．その方法は次のものである．

周率 3, 径率 1 を初めとして, 周率を径率で割り, 定周より少なければ次の数として, 周率に 4, 径率に

1 を加え，多ければ周率に 3，径率に 1 を加える．このようにして，次の表を得る．

| 周率 | 径率 | 周数 |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 整 |
| 7 | 2 | 35 整 |
| 11 | 3 | 33333 33333 強 |
| | · | |
| | · | |
| | · | |
| 352 | 112 | 31428 57143 弱 |
| 355 | 113 | 31415 9292 微強 |

このように，周数を求めていくと，周 355，径 113 に至って，定周に比してわずかな食い違いがあるが，周径率は，大変桁数が多いので，これからは，これを定率とする．

関はこのように書いているが，これについて，建部は，『綴術算経』において，次のように述べている．

わが兄賢明（かたあきら）（1661～1716）は，関氏の術がわずらわしいので，小数点以下の端数を分数にして連分数を作り，それを元に戻していって，逐次の近似分数を作ることを案出した．

この建部賢明の方法は次のものである．

まず，小数部分を次々分数で置き換える．

$$
\begin{aligned}
3.1415926 &= 3+\frac{1}{7.0625159} \\
&= 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15.99593}} \\
&= 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1.004}}} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

これを，途中で切って，

$$3+\frac{1}{7},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}},\ \cdots$$

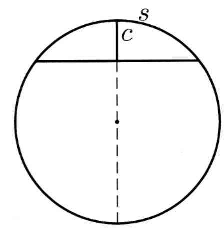
としていくと，

$$\frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \cdots$$

となり，分数 $\frac{355}{113}$ が得られる．

これが，現在この分数を得る普通の解釈である．

## 4. 円弧の長さ




円の一つの弧に対して，弧の中点と，弧の両端を結ぶ弦の中点とを結ぶ線分を矢という．また，弧と弦で囲まれた部分を弧形という．

円の直径と矢を与えて，弧の長さを与える式を求めること，および弧形の面積を求めることは，古くからの課題であった．

すでに，今村知商（?～1668）の『豎亥録（じゅがいろく）』（1639）にその問題の提起が見られ，その後，関も建部もその公式を作ることに努力したのであったが，なかなか困難な問題であった．そして，建部は，『綴術算経』において，はじめてその式を作ることに成功したのである．

### ◆ 建部賢弘の方法

直径 1 の円において，矢の長さ $c$ に対する弧の長さを $s$ とする．このとき，

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = c\left\{1+\frac{2^2}{3\cdot 4}c + \frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}c^2 + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}c^3 + \cdots\right\}$$

建部は，矢の長さ $c$ が 0.0001 である弧について，$\left(\frac{s}{2}\right)^2$ を求め，次の値を得た．

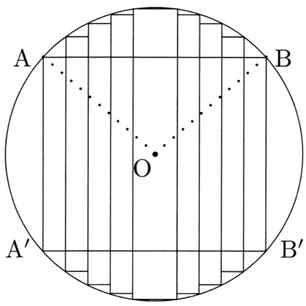
0.000100000033333335111111225
396906666728234776947959587 4

そして，これを子細に分析して，上の式に達したものである．後には，二項式の平方根の級数展開を用いるなど厳密な数式計算により，この式を，一般的に確立している．

### ◆ 安島直円（あじまなおのぶ）（1732?～1798）の方法

建部は，円弧の長さを求めるのに，円周の場合と同じく，与えられた円弧から，それを次々 2 等分した円弧に対する折れ線の長さを計算し，上に

示した値を得たものである．これに対し，安島は，次の方法を考案した．




図において弧 AB の長さを求めたいとする（直径は 1 とする）．図のように細い幅 $\delta$ の短冊を貼り合わせていく，横の位置 $x$ のところの高さは $\sqrt{1-4x^2}$ となるので，それを A から B までいっぱいにつくって貼り合わせると，短冊全体の面積は，$\delta\sqrt{1-4x^2}$ を加えたものになる．そして長方形 ABB′A′ の面積を引き 2 で割り，△OAB の面積を加えたものは，$\delta \to 0$ とすれば扇形 OAB の面積となり，その値は弧 AB の長さ $s$ に等しい．

安島はここで，$\sqrt{1-x^2}$ を級数に展開し，和を求めて，

$$s = 2\sqrt{c}\left(1+\frac{1^2}{2\cdot 3}c+\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}c^2 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}c^3+\cdots\right)$$

という式を得た．

## 5. 級数展開

建部の式で，$c=\frac{1}{2}$ とすれば $s=\frac{\pi}{2}$ であるから，円周率 $\pi$ の値は次のように表示される．

$$\pi^2 = 8\left(1+\frac{2^2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2^2\cdot 4^2}{2^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{2^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots\right)$$

これは，和算において，はじめて無限級数の登場した例としても知られている．この式は，オイラーも示している式であるが，建部のほうがオイラーよりも早いとして，喧伝されているところである．

建部の式の他にも，和算において，このような級数の形で，円周率の計算式が与えられている．

松永良弼（よしすけ）（1693?～1744）

$$\pi = 3\left(1+\frac{1^2}{2^2\cdot 3!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^6\cdot 7!}+\cdots\right)$$

安島直円（1732?～1798）

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}-\frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!\cdot 7}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!\cdot 9}-\cdots$$

［付記］ よく，和算では円周率の下からの近似値だけで，上からの評価がない，といわれる．たしかに，アルキメデスも，また劉徽も，上からおさえる値を求めている．それでは，日本のやり方は欠陥か．

円周の長さとは何だろうか．現在の数学では，曲線の長さとは，曲線上に点をとり，それらを結ぶ線分をつなげた折れ線の長さの極限（上限）を，曲線の長さとしている．このことを考えれば，和算でやっていたような内接正多角形の周の長さの極限として円周の長さとしていたことは，そんなに不適当なこととは考えられない．

それよりも，人は，円の外に描いた多角形の方が周が長い，ということを当然のこととして受け入れているが，その方が問題である．

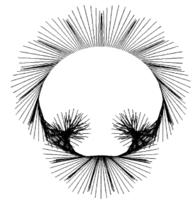
円の弦，すなわち円周上の 2 点を結ぶ線分，その両端点を中心と結んで延長した半直線は，この弦と鈍角をなしているので，円外でこの半直線と交わる線分は，弦より長いので，上のことは証明されるわけなのである．

### 参考文献

1) 平山諦『和算史上の人々』ちくま学芸文庫，2008.
2) 小川束・佐藤健一・竹之内脩・森本光生『建部賢弘の数学』共立出版，2008.
3) 竹之内脩・伊藤隆『π』共立出版，2007.
4) 下平和夫『関孝和』研成社，2006.
5) 小川束・平野葉一『数学の歴史』朝倉書店，2003.

（たけのうち・おさむ，大阪大学名誉教授）

# 四元数



公田　藏

## 1. はじめに——四元数の発見

四元数は，複素数の拡張として，アイルランドの数学者ハミルトン（William Rowan Hamilton, 1805–1865）によって1843年に発見されたものである．

複素数は，$a, b$ を実数，$i$ を虚数単位として $a+bi$ の形に表される数である．複素数に対しては加減乗除の四則演算を行うことができる．また，座標平面上の点 $(a, b)$ に複素数 $a+bi$ を対応させることにより，複素数は平面上の点（あるいは平面上のベクトル）として表される．

ハミルトンが，3次元の空間に対して同様なことはできないかと考え始めたのは1830年のことである．最初は $a+bi+cj$ の形の数を考えていたが，うまく乗法を定義することができなかった．ところが1843年，$a, b, c, d$ を実数とし，$1, i, j, k$ を単位として $a+bi+cj+dk$ の形の数を考え，$i, j, k$ の間の乗法を $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ と定めればよいことに気づいた．これが四元数の発見で，時に1843年10月16日，劇的な発見であった．ハミルトンはこの感激を記念し，ダブリンのブルーム橋の石の欄干にナイフで $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ と刻んだという．

ハミルトンは，1820年代の後半から，カントの哲学の影響を受けて，空間の科学である幾何学に対して，代数学・解析学を「純粋時間」の科学として位置づけることを研究し，1837年発表の論文 "Theory of Conjugate Functions" にはこれに関する記述があり，実数論の原型としても興味があるが，重要なのは，この論文で複素数を実数の対として導入していることである．すなわち，実数の，順序まで考えた対に対して，加法と乗法を

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d), \tag{1}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{2}$$

と定義することにより，複素数を構成したのである．現代の数学用語を用いれば，実数体 $\mathbf{R}$ 上の2次元の線形空間 $\mathbf{R}^2$ において，(2) のように乗法を定義し，体になることを示したのである．四元数はこの考え方の発展である．

## 2. 四元数

四元数は，$a, b, c, d$ を実数，$1, i, j, k$ を単位として $a+bi+cj+dk$ の形に表される数である．ここに単位 $i, j, k$ は，乗法について次の関係を満たすとする．

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{3}$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \tag{4}$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \tag{5}$$

また，$i, j$ の実数倍の間の乗法，例えば $(bi)(cj)$ は，$(bi)(cj) = (bc)(ij)$ のように計算するものと

する．そうすれば，四元数の加法，乗法については，乗法の交換法則を除いて，実数や複素数の場合と同じ計算法則が成り立つ．

現代の用語を用いれば，実数体 $\mathbf{R}$ 上の 4 次元の線形空間 $\mathbf{R}^4$ において，基底を $1, i, j, k$ とし，1 は乗法の単位元として，乗法を (3)–(5) により定義すれば，これによって $\mathbf{R}^4$ には環（$\mathbf{R}$ 上の多元環）の構造が与えられ，しかもこの多元環は非可換体になる．この非可換体を（ハミルトンの）四元数体，その元を四元数というのである．四元数体は最初に知られた非可換体である．

ハミルトンは，四元数 $q = w + xi + yj + zk$ について，$w$ を $q$ のスカラー部分，$xi + yj + zk$ を $q$ のベクトル部分と名づけ，それぞれ $Sq, Vq$ で表した．スカラー部分が 0 である四元数は空間のベクトルである．したがって，四元数は空間のベクトルの概念を拡張したものである．

空間のベクトル

$$\alpha = ai + bj + ck, \quad \beta = a'i + b'j + c'k$$

の（四元数としての）積 $\alpha\beta$ のスカラー部分，ベクトル部分は次のようになる．

$$S\alpha\beta = -(aa' + bb' + cc'), \tag{6}$$

$$V\alpha\beta = (bc' - b'c)i + (ca' - c'a)j + (ab' - a'b)k. \tag{7}$$

現代の用語を用いるならば，$S\alpha\beta$ はベクトル $\alpha, \beta$ の内積の符号を変えたもの，$V\alpha\beta$ は外積（ベクトル積）$\alpha \times \beta$ である．

ベクトルの乗法は次のようにして幾何学的に定義することができる．

いま，空間に直交座標系 O–$xyz$ を定める．座標系は正の向き（右手系）にとるものとする．$x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸の正の向きの単位ベクトルをそれぞれ $i, j, k$ とする．積 $ij$ とは，ベクトル $j$ を，ベクトル $i$ に垂直な平面（すなわち $yz$ 平面）上で正の向きに直角だけ回転して得られるベクトルのことであると定義する（図 1）．この定義から $ij = k$ である．同様に，$ji$ はベクトル $i$ を $j$ に垂直な平面（$zx$ 平面）上で正の向きに直角だけ回転して得られるベクトルと定義する．積 $jk$ などについても同様である．積 $i^2$ については，$i^2j = iij = i(ij) = ik = -j$，同様にして $i^2k = -k$ となることから，$i^2 = -1$ がわかる．

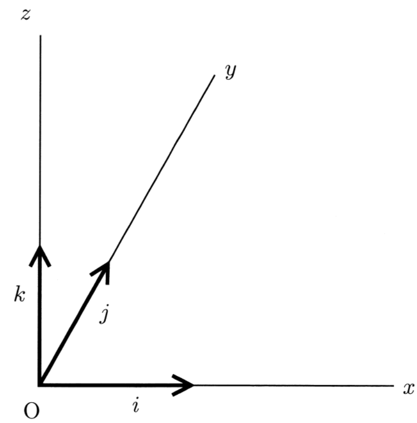



**図 1**　$\mathbf{R}^3$ の単位ベクトル $i, j, k$.
積 $ij$ は，ベクトル $j$ を，$i$ を軸として右ねじ $i$ の進む向きに 90° 回転したベクトルである．

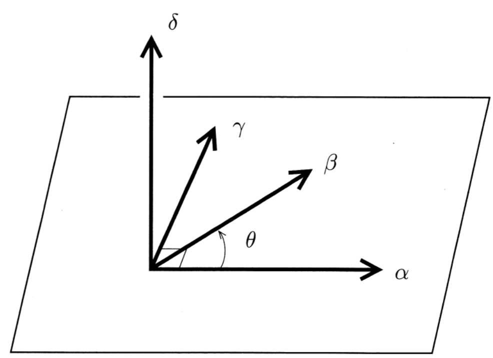



**図 2**　正規直交系 $\alpha, \gamma, \delta$ を作る．

次に，$\alpha, \beta$ を単位ベクトルとする．$\alpha, \beta$ が直交するときは，上の $ij$ の場合と全く同様にして積 $\alpha\beta$ を定義する．したがって，単位ベクトル $\alpha$ に対して $\alpha^2 = -1$ が成り立つ．一般の場合は，現代の用語を用いるならば，$\{\alpha, \beta\}$ からシュミットの方法で $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底（右手系）$\{\alpha, \gamma, \delta\}$ を作る（図 2）．そうすれば $\beta = (\cos\theta)\alpha + (\sin\theta)\gamma$（$\theta$ は $\beta$ が $\alpha$ となす角）と表される．これから

$$\alpha\beta = -\cos\theta + (\sin\theta)\delta$$

が得られる．

単位ベクトルとは限らないベクトル $\alpha, \beta$ の積 $\alpha\beta$ は，それぞれと同じ向きの単位ベクトルの積を求め，それにベクトル $\alpha, \beta$ の長さを掛けたものと定義する．

この定義から容易に，$S\alpha\beta, V\alpha\beta$ の幾何学的意味がわかる．

このようなことから，四元数は幾何学や物理学に応用されたのである．

ハミルトンは 1843 年以来四元数に関する論文を次々と発表し，1853 年には四元数に関する最初の著書 "Lectures on Quaternions" を出版するが，この本は大冊である上に難解であった．64 ページにわたる序文には，ハミルトンが四元数のアイディアを得るに至るまでの経緯と，その背後にある彼の思想と哲学が述べられているが，これは一般の読者にとっては難しくて退屈であったと思われる．ついでハミルトンは，哲学的な部分を除き，幾何学などへの応用を重視した形で，第二の著書 "Elements of Quaternions" を執筆するが，大体完成した段階で逝去し，出版されたのは逝去の翌年の 1866 年であった．四元数の物理学への応用についても記される予定であったというが，これは著者の逝去によって果たされなかった．

## 3. 四元数と行列

行列はケイリー（Arthur Cayley, 1821–1895）によって 1858 年に導入されたものであるが，四元数は行列を用いて表現することができる．

いま，$E$ を 4 次の単位行列とし，

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．$a, b, c, d$ を実数とし，行列 $aE+bI+cJ+dK$，すなわち

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

に四元数 $a+bi+cj+dk$ を対応させれば，この対応は 1 対 1 で，行列の加法，乗法は四元数の加法，乗法に対応する．このようにして，四元数は 4 次の実行列で表現される．四元数は，2 次の複素行列で表現することもできる．

## 4. テイト——四元数の最初の熱烈な傾倒者

四元数の最初の熱烈な傾倒者はスコットランドのテイト（Peter Guthrie Tait, 1831–1901）である．テイトは 1847 年エディンバラ大学に入学するが，ケンブリッジに移り，1852 年ケンブリッジ大学を卒業した．1853 年，出版されたばかりのハミルトンの四元数の著作を読む．ついでハミルトンと文通し，四元数に傾倒する．1860 年エディンバラ大学の自然哲学の教授となる（物理学はまだ自然哲学と呼ばれていた）．テイトは，数学ではなく自然哲学の教授であり，数学教授のケルランド（Philip Kelland, 1810–1879）が講義で四元数を扱ったこともあって，エディンバラでは四元数そのものは講義しなかったという．

ハミルトンの "Lectures" は難解なので，テイトはもっと平易で例の多い四元数の本を書くことを企て，1859 年に執筆に着手する．当時ハミルトンも四元数に関する著作を執筆中で，ハミルトンからの強い要請で，テイトは自分の著作の出版をハミルトンの著書の出版（1866）後まで延期した．テイトの "An Elementary Treatise of Quaternions" の初版が刊行されたのは 1867 年である．

テイトの“Treatise”は，四元数そのものの解説とともに，幾何学および物理学への応用，特に物理学への応用に重点をおいて書かれている．ハミルトンの著書よりは読みやすいため好評で，1873年には加筆した第2版，1890年には大幅に増補した第3版が出版された．第1章でベクトルの和，差，実数倍と幾何学への応用が述べられ，1変数ベクトル値関数の微分も扱われている．四元数は第2章でベクトルの積，商と関連させて幾何学的に導入されている．しかし，ハミルトンよりは読みやすいとはいっても，やさしい本ではなかった．

もっと平易な入門書ということで著されたのがケルランドとテイトの共著の“Introduction to Quaternions”（1873）である．全10章で，最後の第10章はテイト，他の章はケルランドが執筆した．第10章では力学的な内容が扱われるが，他の章は幾何学的な内容で，四元数の記号法による，ベクトルを用いた幾何学である．

ハミルトンの第二の著作“Elements”やテイトの“Treatise”によって，四元数は幾何学や物理学，特に力学や電磁気学に応用されることが知られ，一部の数学者や物理学者が関心をもつようになった．こうして四元数およびその応用を扱う「四元法（quaternions）」は，1870年代から19世紀末頃まで，数学の一つの分野であった．

マックスウェル（James Clerk Maxwell, 1831–1879）はテイトのすすめによって1860年代の終わり頃に四元法を学び，彼の“Treatise on Electricity and Magnetism”（初版は1873）は四元数を用いている．第1巻の最初からベクトルを用い，後の章では四元数を用いているが，成分による表示も併記し，ベクトルや四元数の知識がなくても一応読めるようには書かれている．しかし，四元数を知っているほうが内容を理解しやすい．

他方で，当時はウィリアム・トムソン（William Thomson, 後のケルヴィン卿, Lord Kelvin, 1824–1907）のような，四元数の価値を認めず，四元数の嫌いな学者も多かった．テイトがエディンバラに戻って間もない頃，ウィリアム・トムソンと共著の数理物理学の本が企画されるが，実現したのは力学の部分だけであった．トムソンとテイトの共著の“Treatise of Natural Philosophy”（初版は1867）である．当時よく読まれた本であった．執筆に当たり，トムソンとテイトは，数学的取扱いに四元数を用いるかどうかで意見が対立した．トムソンが四元数の導入に強く反対したため，この本では四元数は用いられていない．ケルヴィン卿は1901年，テイトの没後，数学者クリスタル（George Chrystal）宛の書簡の中で，「われわれ（ケルヴィン卿とテイト）は38年間，四元数について戦争をしてきた」と記しているという．

## 5. 四元法からベクトル解析へ

四元数は空間のベクトルの概念を拡張したものであるが，ベクトルの概念の他の拡張として，グラスマン（Hermann Günther Grassmann, 1809–1877）の広延論（Ausdehnungslehre）がある．これは画期的な業績であるが，その最初の著作“Die lineale Ausdehnungslehre”（1844年出版）は，当時は学界から注目されなかった．グラスマンは前著を全面的に書き改めた新しい版を1862年に出版し，これによってようやく一部の数学者から注目されるようになる．

こうして1870年代頃から，一部の数学者や物理学者は四元法や広延論に関心をもつようになる．例えば，クリフォード（William Kingdon Clifford, 1845–1879）は当時の英国数学者の中ではヨーロッパ大陸の数学に関心をもち，四元法にも広延論にも通じていた．彼は，四元数の拡張に関する研究もしたが，四元法よりは広延論のほうに関心があったと思われる．クライン（Felix Klein, 1849–1925）は1880年の複素関数論の講義において，緒論で複素数とともに四元数，広延論，多元数について簡潔に説明している．なお，複素関数論の拡張としての，四元数変数の関数論は，19世紀末から20世紀初めにかけて，何人かの数学者によって研究されたが，発展することはなかった．

アメリカのギブズ（Josiah Willard Gibbs, 1839–1903）は，マックスウェルの電磁気学を読

み，電磁気学などへの応用に必要なのは四元数ではなくてベクトルであることに気づき，1870 年代末までに四元数を用いないベクトル解析のアイデアを得てエール大学でこれを講義し，その概要は私家版として作成された（1881, 1884）．イギリスのヘヴィサイド（Oliver Heaviside, 1850–1925）も，1890 年代の初めから，四元数を排除してのベクトル解析に関する一連の論文と，ベクトル解析を応用しての電磁気学の論文を次々に発表した．

このようにして，四元数を用いないベクトル解析は次第に電磁気学関係者に知られるようになり，ベクトル解析の普及とともに，四元数が力学や電磁気学で用いられることはなくなったのである．

## 6. 四元数から多元数へ

19 世紀の中頃から，代数学はそれまでの方程式中心の学問から，次第に代数系を対象とする学問へと変容していく．体や群などに加えて，四元数，行列，多元数，グラスマンの「交代数」などに関する研究が行われるようになる．

実数体 $\mathbf{R}$ 上の線形空間 $\mathbf{R}^n$ に積が定義されて環の構造をもつとき，$\mathbf{R}$ 上の多元環，その元を多元数（多元複素数，hypercomplex number）という．同様にして，一般の体上の多元環や多元数が定義される．一般の多元数の研究は，米国のベンジャミン・パース（Benjamin Peierce, 1809–1880）に始まる．

四元数体は最初に知られた非可換体であるが，四元数以外にも非可換体を作るような多元数はあるであろうか．これに対しては，次のフロベニウス（Georg Frobenius, 1849–1917）の定理（1878）がある．

**定理**　実数体上の有限次元の多元体（division algebra）は実数体，複素数体，四元数体に限る．

ハミルトンが $a+bi+cj$ の形の数を考えて，乗法が定義できずに苦労したのは，ここにあったのである．もしハミルトンがこの形の数に固執していたら，四元数を発見することはなく，成果は得られなかったであろう．

1880 年代から 90 年代は，四元数を用いないベクトルの理論が作られ，四元法からベクトル解析へと移行していった時代であり，また，グラスマンやハミルトンらのアイデアを発展させた新しい代数学が芽生えた時代であった．そして，四元数は，幾何学や物理学に応用するという立場で取り上げられることはなくなり，代数学で非可換体の例として扱われるようになっていくのである．

## 7. 四元数と日本

わが国において最初に四元数が教授されたのは，明治 7 年（1874），現在の東京大学の前身校（の一つ）である東京開成学校の工学科の「高等数学」の科目においてであった．この年，機械工学の教授として英国からスミス（Robert Henry Smith）が着任し，工学の科目とともに「高等数学」として四元数と微分積分を教えたのである．スミスはエディンバラ大学の卒業である．四元数の教科書はケルランド・テイトの本であった．東京開成学校の 1875 年の英文の便覧（Calendar）には前年度（明治 7 年度）の学年末試験問題が収録されているが，“Quaternions” では全 6 問中の 4 問が収録され，脚注に，あとの 2 問は記号がなくて印刷できなかったと記されている（これは当時のわが国の活版印刷の状況を伝えている）．記録されている問題から，四元法の記号法による，ベクトルの幾何が教授されたことがわかる．

スミスは明治 11 年に帰国し，後任は同じくエディンバラ大学出身のユーイング（James Alfred Ewing, 1855–1935）であるが，彼が力学に関連して四元法を扱ったかどうかは不詳である．明治 16 年，ユーイングの帰国と入れ替わりに東京大学理学部物理学教師として着任したのは，エディンバラ大学のテイト教授の助手のノット（Cargill Gilston Knott, 1856–1922）である．ノットはマックスウェルの電磁気学などを教科書としているので，力学や電磁気学に関連して四元法を扱ったと考える．

これより前，明治 10 年，菊池大麓（1855–1917）

が英国留学から帰国し，東京大学理学部の数学教授となり，英国流の数学を教授したが，明治13年度の理学部数学科の教科書・参考書の中に，ケルランド・テイトの書物が記されている．菊池は後年まで講義で四元法を取り扱っている．

菊池はクリフォードの遺稿 “Common Sense of the Exact Sciences”（ピアソン（Karl Pearson）が整理，加筆して1885年に出版）を翻訳し，『数理釈義』として明治19年（1886）に出版した．一般向けの啓蒙書であるが，ベクトル，複素数と，それに関連して四元数と広延論に関するごく簡単な記述がある．日本語の数学書でベクトルや四元数について記されたものはこれが最初である．しかし，四元数などに関する記述は極めて簡単であり，この本だけでそれらの内容を正しく理解することは困難であったと思われる．

わが国で最も四元法に傾倒したのは木村駿吉（1866–1938）である．木村は明治21年（1888）東京大学理学部物理学科の卒業であり，在学中にノットに学んでいる．明治26年に渡米し，エール大学のギブズ教授のもとで数学と物理学とを学び，Ph.D. の学位を得て明治29年（1896）に帰国する．この間1895年にはオランダのモーレンブレク（Pieter Molenbroek）らとともに，「四元法や関連分野の研究を振興するための協会」の創立（1896）に尽力する．帰国後第二高等学校教授となる．木村は有志のために四元法を講義し，それは全2巻にまとめて出版される予定であったが，実際には明治30年（1897）に第1巻が出版されただけであった．木村駿吉述，波木井九十郎編輯『四元法講義　第一巻　緒論』である．

冒頭の序文では，四元法について，歴史を含め簡単に述べられている．ハミルトンの四元法とともに，グラスマンの広延論を評価していることは注目してよいであろう．本文ではベクトルだけが扱われ，四元数は扱われない．ベクトルの内積，外積も扱われない．他方，実変数（1変数および2変数）のベクトル値関数の微分や，曲線や曲面の微分幾何学あるいは運動学的取扱いが含まれている．したがって，この第1巻は，ベクトルを用いた幾何学である．当時のわが国においては程度が高く難しい本であった．第2巻が出版されなかったため，結果として木村の『四元法講義』は，四元法ではなくベクトルの幾何学や力学における有用性を示し，四元法からベクトル解析への移行という，当時の数学の流れを見せたともいえる．

木村はその後間もなく海軍で無線電信の研究と実用化に力を尽くし，それは日露戦争において大変役に立ったのである．しかし，木村は四元法や数理物理学の研究からは離れてしまうのである．

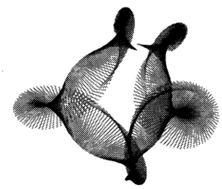
なお，明治30年代までにわが国で教えられた数学の中で最も程度の高いものは，四元法と楕円関数論であった．

### 参考文献


1) 藤原松三郎，『代数学』第二巻，内田老鶴圃，1929.
2) 堀源一郎，『ハミルトンと四元数』，海鳴社，2007.
3) 彌永昌吉監修，足立恒雄・浪川幸彦監訳『クライン：19世紀の数学』，共立出版，1995.
4) 上野健爾・三浦伸夫監訳，『カッツ　数学の歴史』，共立出版，2005.
5) B.L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, 1985.
6) Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, Dover Publ., 1994.
7) Israel Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, 2007.
8) 小松醇郎，『幕末・明治初期数学者群像』，下巻，吉岡書店，1991.
9) 公田　藏，「四元法（quaternion）と明治前期の日本：日本の「高等数学」教育史の一断面」，数理研講究録 **1257**『数学史の研究』(2002), 244–259.
10) 公田　藏，「日本の数学教育とベクトル：この百二十五年」，数理研講究録 **1317**『数学史の研究』(2003), 190–204.


（こうた・おさむ，立教大学名誉教授）

# アボガドロ数とその今日的省察



伊藤 公久

## 1. はじめに

高校の化学で最初に習う項目の一つであるアボガドロ数は，数学における特別な「数」ではなく，いわゆる基礎物理定数である．その単位は $[\mathrm{mol}^{-1}]$ であり，1 [mol]（モル）の粒子集団の中に存在する粒子の個数を表している．個数はもちろん物理単位ではないが，個数を表すというアボガドロ数のみが持つ役割は，すべての物質は原子・分子から成り立っているという原子論・分子論を明示することにあると考えられる．近代科学の最大の成果が原子論・分子論であるということはよく言われているが，その言葉に従えば，アボガドロ数はまさに近代科学の象徴である．現在使われているSI単位系（The International System of Units）には，7つの基本物理量として，長さ [m]，質量 [kg]，時間 [s]，電流 [A]，熱力学温度 [K]，光度 [cd] とともに，物質量 [mol] が選ばれている．mol（mole：モル）の定義は次の通りである[1]．

**1)** モルは，0.012 kg の炭素12の中に存在する原子の数に等しい数の要素粒子（elementary entities）を含む系の物質量であり，単位の記号は mol である．

**2)** モルを用いるとき，要素粒子が指定されなければならないが，それは原子，分子，イオン，電子，その他の粒子またはこの種の粒子の特定の集合体であってよい．

アボガドロ数は物理定数であるため，現在ではアボガドロ定数（通常 $N_A$ で表す）と呼ばれており，CODATA（Committee on Data for Science and Technology）によって国際的に認められている値は $N_A = 6.02214179 \times 10^{23}\,[\mathrm{mol}^{-1}]$ となっている[2]．本稿では，アボガドロ数についての解説をした後，アボガドロ数が明示する原子論・分子論に立って，数理科学に関連した自然現象を眺めてみたい．

## 2. 分子説とアボガドロの仮説[3]

原子説は，古代ギリシャの哲学者レウキッポス（Leucippus または Leukippos）とデモクリトス（Democritos）に端を発し，哲学的物質観の一つとして後世に受け継がれていった．その後，錬金術の時代を経て近代化学の黎明期が到来する．18世紀末に，ラボアジェ（A.L. Lavoisier）は質量保存則（1774年）を，プルースト（J.N. Proust）は定比例の法則（1799年）を発見した．19世紀になって，ドルトン（J. Dalton）は倍数比例の法則（1802年）を見出し，これをもとに「すべての元素は一定の質量と大きさを持つ原子からなっており，化合物は異なる数種の原子が最も簡単な整数の比で結合することによってつくられる.」という，有名な原子説（1804年）を提唱した．1808年にはゲイ・リュサック（J.L. Gay-Lussac）が気体反応の法則を発見し，化学の基礎となる様々な法

則が揃うこととなった．しかし，ここで大きな矛盾が生じてしまう．気体反応の法則によれば，2体積の水素ガスと1体積の酸素ガスを反応させると，2体積の水蒸気が生成する．ドルトンの言う原子（実は分子）自身の体積は気体が占める体積に比べて遥かに小さいので，1体積中に含まれる粒子数が元素の種類によらないと考えてドルトンの原子説を適用すると，反応の結果粒子の総数は$\frac{2}{3}$に減ってしまうのである．この矛盾を解決するため，アボガドロ（A. Avogadro）によって次の仮説が提唱された．「同じ温度および圧力の下における種々の気体の同体積は同数の分子を含む.」これをアボガドロの仮説という（現在では法則になっている）．アボガドロは，気体の体積を決定する物理的単位を分子（molécule intégrante），化合物の組成を決定する化学的単位を原子（molécule élémentaire）と名付け，この2つを明確に区別した．この仮説に従えば，水素と酸素はそれぞれの原子2つが結合した分子であり，水は水素原子2つと酸素原子1つが結合した分子であるということが分かり，気体反応を矛盾なく説明することができる．

## ■ 3. ペランの実験[4]とアボガドロ数の測定法 ■

前述したアボガドロの仮説がアボガドロの法則となるためには，彼の提唱する分子が実際に存在することを実験的に証明しなくてはならない．ジャン・ペラン（Jean Perrin）はパリ大学教授，同大学物理化学研究所長を務めたフランスの物理学者・物理化学者であるが，コロイド粒子の懸濁液を用い，アインシュタインの提唱したコロイド粒子のブラウン運動の理論を巧みな実験によって実証した．この研究により，ペランは1926年「物質の不連続的構造に関する研究，および特に沈降平衡に関する発見」に対するノーベル物理学賞を受賞している．彼はアインシュタインのブラウン運動に関する理論に基づいて，以下の4つの異なる実験によってアボガドロ数を求めた．それは，① 乳濁液中微粒子数の高度分布の測定，② ブラウン運動による粒子の平均二乗変位の測定，③ 個々粒子の回転運動の測定，④ 拡散係数の測定である．各々の測定によって求められたアボガドロ数の値は，それぞれ，① $6.82 \times 10^{23}$，② $6.88 \times 10^{23}$，③ $6.5 \times 10^{23}$，④ $6.9 \times 10^{23}$ であった．

アボガドロ数には，原理的に異なった数々の推算法や測定法がある[5]．ペランの実験よりも早く，1865年にロシュミット（J. Loschmidt）によって，アボガドロ数の値が最初に導かれた．これは気体分子運動論を用いて，気体分子の平均自由行程と，液化した気体の密度から見積もった分子の直径とから，単位体積あたりの分子数を求めたものである．これにちなんで，0 [℃]，1 [atm] における理想気体1 [$cm^3$] 中に含まれる気体分子数のことを，ロシュミット数と呼ぶ．その他，大気中の分子による光の散乱，電気素量の測定，液体の臨界蛍光などによってもアボガドロ数を求めることができる．また，物理学の関係式を用いれば，プランク定数からアボガドロ数を求めることもできる．

現在最も信頼性が高いとされているアボガドロ数の測定方法は，X線結晶密度法と呼ばれるものである．これは，結晶の密度，格子定数（原子間距離），モル質量（平均原子量）の測定値からアボガドロ数を算出する方法である[6]．我が国の産業技術総合研究所では，X線干渉計を使ってシリコン結晶の格子定数を測定する一方，真球に極めて近く研磨された質量1 [kg] のシリコン球体の形状をレーザー干渉計によって数 [nm] の精度で測定し，8桁の精度で密度を得た．その結果，約7桁の測定精度でアボガドロ数を求めることに成功した．2004年には，アボガドロ数の精密測定のための国際プロジェクトが開始され，同位体濃縮シリコン結晶の利用によって8桁の精度を目指している．質量の単位であるキログラム [kg] は，国際キログラム原器という人工物によって定義されている最後のSI単位であるが，キログラム原器の質量は表面吸着ガスなどの影響で徐々に増加してしまうといわれている．8桁の精度でアボガドロ数を求めることができれば，原子の質量を基準として質量の単位を決める，原子質量標準が実現することになる．

## ■ 4. 分子説から見た化学反応速度 ■

アボガドロの仮説を用いることによって，水素と酸素が反応して水が生成する反応を (1) 式に示す化学反応式で書き表すことが可能になった．

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O. \tag{1}$$

図 1 に示すように原子を球で表すと，「水素分子 2 つと酸素分子 1 つから水分子 2 つが生成する.」という図が描ける．この図は中学校の理科の教科書にも載っているが，一つ注意することがある．それは，「実際の化学反応が図のように起きているとは限らない.」ということである．一般に化学反応は 1 回の反応で完結している反応（素反応，elementary reaction）の組合せから成り立っているので，我々が通常お目にかかる化学反応式は，反応の量論関係を示しているだけのものであると理解したほうが良い．一方，素反応は分子そのものの反応を反映している．すなわち (1) 式は，「化学反応によって，水素 2 モルと酸素 1 モルから水 2 モルが生成する」ことを表しているだけである．いま，化学反応を単純に分子の衝突によって起きる現象と考えてみよう．多数の分子が動き回っているときに水素分子 1 つと酸素分子 1 つが衝突する確率は，水素分子 2 つと酸素分子 1 つが同時に衝突する確率に比べて遥かに高いことが予想されるだろう．実際に水素と酸素の反応では，(2) 式に示すような一連の素反応が起きていることが報告されているが，いずれも 2 つの分子間の反応であることがわかる．なお，式中「•」印は，ラジカルと呼ばれる遊離基を表している[7]．

$$\left.\begin{array}{l} H_2 + O_2 \rightarrow H_2O\bullet + H\bullet \\ H_2 + HO_2\bullet \rightarrow HO\bullet + H_2O \\ H_2 + HO\bullet \rightarrow H\bullet + H_2O \\ H\bullet + O_2 \rightarrow HO\bullet + \bullet O\bullet \\ \bullet O\bullet + H_2 \rightarrow HO\bullet + H\bullet \end{array}\right\} \tag{2}$$

一般に $aA + bB \rightarrow cC + dD$ といった反応の化学反応速度は，次のような化学反応速度式で書き表すことができる．

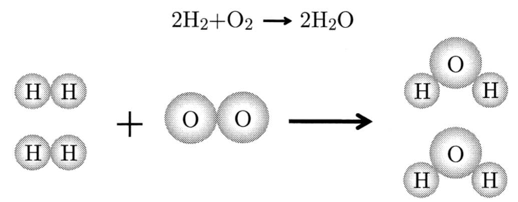



**図 1** 分子模型による化学反応の説明図．

$$-\frac{dC_A}{dt} = kC_A^m C_B^n. \tag{3}$$

ここで $C_A, C_B$ はそれぞれ成分 $A, B$ の濃度であり，指数 $m, n$ を反応次数，$k$ を速度定数と呼ぶ．$m, n$ は実験によって決定されるパラメータであり，化学量論係数 $a, b$ などとは本質的に無関係である．また $m, n$ は整数である必要もなく，吸着を伴う反応などでは非整数の反応次数が得られる場合もある．(3) 式をまた，$m+n$ 次反応速度式と呼ぶ．$m = n = 1$ であれば，2 次反応速度式になる．反応速度が分子の衝突頻度に比例し，素反応のうちの一つが全体の反応速度を支配している場合，濃度 $C$ は単位体積中の物質量，すなわち分子数であるから，反応速度は 2 次反応速度式で表されるはずである．また，一方の濃度が他方に比べて十分に高ければ，反応速度は 1 次反応速度式で表される．事実，非常に多くの化学反応を 1 次もしくは 2 次の単純な速度式で記述することができる．気体反応では 3 次反応も測定されているが，実験的に 3 次以上の反応速度式が得られた場合，その裏には複雑なメカニズムが潜んでいると考えられる．すなわち分子論的な立場に立てば，反応拡散方程式の反応項に 3 次以上の非線形性が現れる場合には，反応メカニズムに関する詳細な検討が必要であるということができる．

## ■ 5. 分子説から見た流体 ■

流体は連続体として近似されているが，実際にはその構成要素は分子であり，連続体ではない．しかし流体を連続体と見なすことによって，粘性流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式が導かれる．この方程式は非線形偏微分方程式として有名だが，この非線形性の由来について物

理学会誌に興味ある一文があるので，ここにその一部を引用してみたい．「一方，流体力学でしばしば言及される非線形はそれらの系とは異質のものであり，流体運動を表現する方法から生じる[8)]．」文中のそれらの系とは，例えば万有引力の法則が適用される天体運動のことを指している．万有引力の大きさは天体間の距離の2乗に反比例するので，運動方程式は本質的に非線形になる．これに対して，ナビエ・ストークス方程式の非線形性は，流体運動を表現する2つの方法に起因しており，物理法則自体が非線形というわけではないというのが，この文の主張である．

流体力学における2つの表示法の一つ目はラグランジュ表示と呼ばれ，流体に質点系の力学を適用するために考え出されたものである．そこでは，流体の構成要素を分子より遥かに大きなスケールの流体粒子と考え，個々の流体粒子の位置と速度を，時間の関数として記述する．それに対して，もう一つの表示法であるオイラー表示は，空間の各点における速度や他の物理量を，時間と位置の関数として表す方法である．通常，我々はオイラー表示に慣れ親しんでいるが，オイラー表示で与えられた速度を時間で微分しても流体の加速度は得られない．ある時刻に位置 $\boldsymbol{x}$ にいた流体は，次の瞬間，もうそこにはいないからである．川面に浮かべた浮きの動きを見て川の流れの速さを知ろうとするとき，観測者はすでにラグランジュ表示の立場にいる．ラグランジュ表示を用いて流体の運動を記述する際には，非線形性が現れてこないことは明らかである．詳しくは参考文献 8,9) を参照していただきたいが，図2に示したように，オイラー表示下で流体粒子の位置と速度の変化を考え，その極限を取ることによってラグランジュ表示をオイラー表示に変換する．この操作の結果として非線形性が生じるのである．

では，なぜオイラー表示に変換する必要があるのだろうか．その答えは，流体の持つ粘性に起因している．

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}. \qquad (4)$$

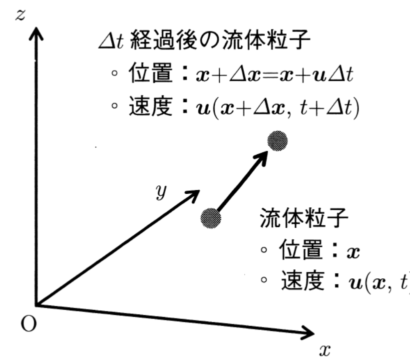


図2　流体粒子の位置と速度の変化．

(4) 式はニュートンの粘性の法則と呼ばれ，流体内の速度勾配に比例してせん断応力が発生する（遅い流体が早い流体に引きずられる）ことを表している．式中 $\tau_{yx}$ は $y$ 軸に垂直な面に働く $x$ 方向のせん断応力，$u_x$ は空間のある位置における流体の $x$ 方向の速度，$\mu$ は粘性係数である．流体によって生じる粘性力は，分子論から見れば流体粒子間を出入りする分子の運動によるものと説明することができるが[10)]，流体を連続体と見た場合には，(4) 式を用いてこれを記述する必要が生じる．質点系の力学によって定義される加速度と (4) 式によって与えられる粘性力とを用いて運動方程式を導出しようとすれば，ラグランジュ表示からオイラー表示への変換は避けて通ることのできない道である．

言い換えれば，ナビエ・ストークス方程式の非線形性は，ニュートンの提唱した2つの法則，すなわち運動の法則と粘性の法則とを同時に満たすために生じたのである．しかし，アボガドロ数の主張する世界観に立てば，運動の法則における流体粒子自身の速度と，分子が構成する流体場の速度を同一視するという操作自体に，本質的な無理があるように思えてならない．といって，基本的構成粒子である分子個々の運動方程式を連立して解くことは，アボガドロ数の値の大きさを見れば不可能であることは明らかである．原子論・分子論を認めた世界においての解析学を必要とする時代が来ているのではないだろうか．

## 6. おわりに

1913年に書かれたジャン・ペランの著書『原子』(玉蟲文一訳)[4]の序文には，次のような言葉が述べられている．「石けん水を食塩水で処理して得られる白い羽毛状の一片を観察してみよう．遠くからこれを見ると，その輪郭が明瞭に見えるが，少し近づいて見るとその鮮明さは消えてしまう．我々の眼はその一点に切線を決めることができない．…中略…何故なれば，その倍率を高めてゆくたびに新しい凸凹が現われ，たとえば磨かれた鋼の玉が与えるような滑らかで落着きのある印象は到底得られないからである．こうして，もしこの球が古典的連続性を有効に表すものとするならば，その石けん片は微分係数のない関数といういっそう一般的な概念を十分論理的に暗示し得るのである．」分子の発見者は，およそ100年前に今日のカオス・フラクタル幾何学の必要性を予見していたように思われる．

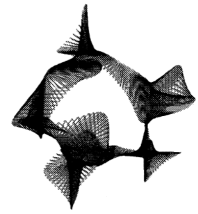
最後に，本稿執筆の機会を与えてくださった早稲田大学教授足立恒雄先生，執筆に際し有益なアドバイスをいただいた同北田韶彦先生に，この場をお借りして感謝したい．

### 参考文献

1) 朽津耕三,『化学で使う量の単位と記号』, 丸善, 2002.
2) CODATA, Internationally Recommended Values of the Fundamental Physical Constants, (NIST ホームページ, http://physics.nist.gov より閲覧可能).
3) 久保昌二,『化学史—化学的理論発展の歴史的背景』, 白水社, 1949.
4) ジャン・ペラン (玉蟲文一訳),『原子』, 岩波書店, 1978 (Jean Perrin, "les atomes", 1970, Gallimard).
5) 西條敏美,『物理定数とは何か』, 講談社ブルーバックス, 1996.
6) 藤井賢一,「アボガドロ定数の高精度化に成功」, Vol.4, 2004, (産業技術総合研究所ホームページ, http://www.aist.go.jp より閲覧可能).
7) 齋藤勝裕,『反応速度論』, 三共出版, 1998.
8) 高木隆司,「物理学一般としての流体力学」日本物理学会誌, **60** 巻, 2006, pp.429–434.
9) 巽 友正,『連続体の力学』, 岩波書店, 1995.
10) 高木隆司,「質点から剛体・連続体の力学へ」, 数理科学, 42 巻, 2004, pp.28–33.

(いとう・きみひさ，早稲田大学理工学術院)

# Pisot 数



秋山 茂樹

## 1. 読者への挑戦状：べき乗の小数部分の分布

わかりやすい未解決問題は数論ファンを魅了してやまない．双子素数，$3n+1$ 問題，奇数の完全数はあるか，オイラー定数は無理数か ⋯．無名のものも多くある．その一つを紹介しよう．

1 より大きい実数 $\alpha$ を考え，$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots$ という $\alpha$ のべき乗でできる数列の小数部分 $\langle \alpha^n \rangle$ がどのように分布するか考えてみる．例として $\alpha = 1.5$ とすると

$$1.5^1 = 1.5,$$
$$1.5^2 = 2.25,$$
$$1.5^3 = 3.375,$$
$$1.5^4 = 5.0625,$$
$$1.5^5 = 7.59375$$

だから

$$0.5,\ 0.25,\ 0.375,\ 0.0625,\ 0.59375,\ \cdots$$

となる．最初の 10000 項を計算し $[0,1]$ 区間を 20 等分したときどこに入るかの度数分布を書いてみると図 1 のようになり，かなり均等に散らばっているように見える．

実数列 $a_n$ が**一様分布**するとは，小数部分 $\langle a_n \rangle$ が $[0,1]$ に均等に散らばること，つまり任意の部分区間 $[a,b]$ について

$$\frac{a \le \langle a_n \rangle \le b \text{ となる } M \text{ 以下の自然数 } n \text{ の個数}}{M}$$

が $M$ を大きくすると $b-a$ に収束することと定

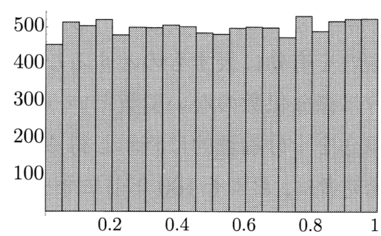



図 1　$\langle (3/2)^n \rangle$ の分布．

義する．上に述べた $1.5^n$ は一様分布するのだろうか．知る人ぞ知る未解決問題の一つである．ほとんどすべての $\alpha > 1$ について $\alpha^n$ は一様分布することが Koksma により証明されている[7]．しかし具体的な $\alpha$ で $\alpha^n$ が一様分布するものは一つも知られていない．何とも不愉快だが数論ではよくある状況だ．読者の中から挑戦者が現れるのを待っているのかもしれない．

## 2. 奇妙な数の登場：Pisot 数の定義と例

逆に $\alpha^n$ が一様分布しない具体例はあるだろうか．実は，本稿の主人公の Pisot 数と呼ばれる一連の奇妙な数が存在する．

例として黄金比 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803$ で同じ計算をしてみよう．$\|x\|$ を $x$ と一番近い整数との距離とすると

$$\|\alpha^1\| = 2 - 1.61803 = 0.38197,$$
$$\|\alpha^2\| = 3 - 2.61803 = 0.38197,$$
$$\|\alpha^3\| = 4.23607 - 4 = 0.23607,$$

$$\|\alpha^4\| = 7 - 6.85410 = 0.14590,$$

$$\|\alpha^5\| = 11.09017 - 11 = 0.09017$$

のように 0 に近づいていることがわかる．この理由は簡単だ．$\beta = (1-\sqrt{5})/2$ とおけば $\alpha, \beta$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの根となる．根と係数の関係で $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ で $\alpha^n + \beta^n$ は $n = 1, 2, \cdots$ で常に整数となる．なぜなら基本対称式 $p = \alpha + \beta$ と $q = \alpha\beta$ で表すと $p, q$ の整数係数の多項式で書けるからだ．ところが $|\beta| < 1$ なので $\beta^n$ は 0 に近づき結局 $\alpha^n$ も整数に近づかなければならない．

このアイデアを一般化すると次のような数が考えられる．$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ を整数とし $\alpha > 1$ は $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0 = 0$ の根，さらに他の根はすべて絶対値が 1 より小とする．このような性質を満たす方程式の根 $\alpha$ を **Pisot 数**[*1)]と言う．$\alpha$ が Pisot 数ならば黄金比と同じ理由で $\|\alpha^n\| \to 0$ となってしまう．特別な場合として 2 以上の整数も Pisot 数である．逆に $\|\alpha^n\| \to 0$ が成り立つのは $\alpha > 1$ が Pisot 数になる場合に限ると予想されている．

Salem[14)] は Pisot 数の全体が実軸上で閉集合となるという驚くべき結果を示している．黄金比は Pisot 数の最小の集積点で，これより真に小な Pisot 数はリストアップすることができる[2)]．最小の 10 個は

$$\begin{array}{ll}
1.32472 & x^3 - x - 1, \\
1.38028 & x^4 - x^3 - 1, \\
1.44327 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1, \\
1.46557 & x^3 - x^2 - 1, \\
1.50159 & x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1, \\
1.53416 & x^5 - x^3 - x^2 - x - 1, \\
1.54522 & x^7 - x^6 - x^5 + x^2 - 1, \\
1.56175 & x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1, \\
1.57015 & x^5 - x^4 - x^2 - 1, \\
1.57368 & x^8 - x^7 - x^6 + x^2 - 1
\end{array}$$

となる．最小と 2 番目の Pisot 数は Siegel によって決定された．最小の $\theta = 1.32472$ は $x^3 - x - 1$ の根だが，他の 2 根は複素共役で $-0.66236 \pm 0.56228i$ となり絶対値は 1 より小さい．試しに 100 乗は

$$\theta^{100} = 1630580875001.99999953705\cdots$$

で確かに整数に近い．

## 3. 反発力をもつ数：Pisot 数と準結晶

Pisot 数は少し変わった代数的な対象だが，驚くほど多様な数理科学の諸分野に現れる．その一つの理由は Pisot 数がある種の反発力（？）をもっていることにある．例として係数が $-1, 0, 1$ だけからなる黄金比の多項式で表せる数の全体を考えてみよう．$\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ として

$$S = \left\{ \sum_{n=0}^{l} a_n \alpha^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_n = -1, 0, 1 \\ l = 0, 1, 2, \cdots \end{array} \right\}$$

とおけば $S$ は実数軸（1 次元ユークリッド空間）の中で 2 つの重要な性質を満たしている．

**1.** $S$ の隣合う 2 点間の距離は一定値 $R > 0$ 以下.
**2.** $S$ の隣合う 2 点間の距離は一定値 $r > 0$ 以上.

最初の性質を $S$ が実軸で**相対稠密**であると言い，後の性質を**一様離散**と言う．相対稠密かつ一様離散な集合を **Delone 集合**と言う（図 2）．これらの概念は距離空間であれば同じように定義されるが，以下に扱うのはユークリッド空間の Delone 集合である．整数はもちろん 1 次元ユークリッド空間の Delone 集合であり $R = r = 1$ととれる．$S$ が実軸で相対稠密なのは簡単に分かる．$S$ が 1 次元ユークリッド空間で一様離散なことを示そう．$S$ の 2 点間距離は

$$A = \sum_{n=0}^{l} (a_n - b_n)\alpha^n$$

だが，これに対して



**図 2**　$S$ のなす Delone 集合.

*1）Pisot–Vijayaraghavan 数（PV 数）とも呼ばれる．

$$B = \sum_{n=0}^{l} (a_n - b_n)\beta^n$$

を考える．$|a_n - b_n| \le 2$ より等比級数で上から評価すれば $|B| \le 2/(1-|\beta|)$ となる．前節同様に積 $AB$ は $\alpha, \beta$ の基本対称式 $p = \alpha + \beta$, $q = \alpha\beta$ の整数係数の多項式になるので，$AB$ は整数になる．従って $A \ne 0$ ならば $|AB| \ge 1$ であり

$$|A| \ge 1/|B| \ge \frac{1-|\beta|}{2} = 0.19098 > 0$$

なので 2 点間距離は一定値より以上．従って一様離散となる．この証明から $\alpha$ が Pisot 数のとき

$$\left\{ \sum_{n=0}^{l} a_n \alpha^n \;\middle|\; \begin{array}{l} |a_n| \le K,\ a_n \text{は整数} \\ l = 0, 1, 2, \cdots \end{array} \right\}$$

はいつでも一様離散である．つまり $\alpha$ が Pisot 数ならば $\sum_{n=0}^{l} a_n \alpha^n$ という形の元は，**あまり近づくことができない**．さらに図 2 をよく観察すると図 3 のように $S$ の 2 点間距離は 3 種類しかない！（この性質については後述する．）

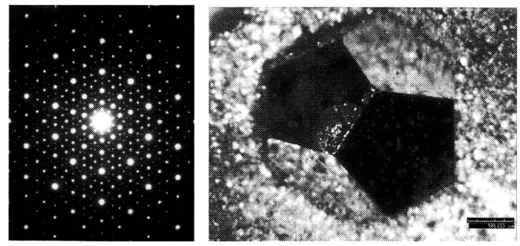
歴史的には Pisot 数は調和解析における例外集合として様々な問題に登場してきた．定められた集合上で 2 つの Fourier 級数の値が一致すれば Fourier 係数が完全に一致するかどうかを調べる「一意性集合」の問題[2] や，$|\lambda| < 1$ となる $\lambda$ を固定しランダムに符号を選んだときの $\sum_{n=1}^{\infty} \pm\lambda^n$ の分布の問題[11] などがその代表である．その根源的な理由は Pisot 数の多項式の形の 2 点は近づけないので，それで生成される点集合は実軸にランダムに分布できないことにある．

原子や分子はその物理的制約から一定の距離以下に近づくことはできない．Pisot 数の多項式で表される数はこのような状況を数理モデル化するのにも適している．

結晶構造は次元と同数の一次独立な周期（並進対称性）と回転対称性をもち，ユークリッド空間の等長変換群のうちコンパクトな基本領域をもつ離散部分群により記述される．このような群は次元が定まれば有限種類であり*2)，2 次元では 17 個，3 次元では 230 個に分類され結晶学の常識となっている．ところが 1984 年に Shechtman 等[16] は，アルミニウムとマンガンの合金を液体状態から急冷した固体の X 線回折像が五角対称の離散的な輝点を示すことを見つけた．図 4 は最新の物性研究の成果*3) である．3 次元では 2, 3, 4, 6 回で一回転する回転対称性（つまり，$180°, 120°, 90°, 60°$ の回転）以外は並進対称性と両立しない．

|b|c|b| a |b| a |b|c|b| a |b| a | a |b| a |b|c|b| a |b| a |b|c|b|

**図 3**　$S$ は 3 区間によるタイル張り．



(a)　(b)

**図 4**　(a) 電子回折像，(b) 外形．

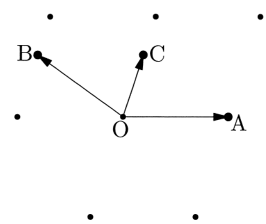



**図 5**　五角対称の結晶は不可能．

簡単に説明してみよう．並進対称性により結晶は図 5 のような格子の構造を持っている．さらに点 O に関する五角対称性（$72°$ の回転）をもつと仮定しよう．点 O に最も近い格子点 A を考えると格子はベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動で不変となる．従ってこれを $144°$ 回転したベクトル $\overrightarrow{OB}$ でも不変であり，従って $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ でも不変となる．ところが C は A より O に近くなってしまうので A の取り方に矛盾する．

この説明は 3 次元でも通用し，このような構造

*2)　Hilbert の第 18 問題．Bieberbach により 1910 年に解かれた．

*3)　この驚くべき鮮明な画像は東北大の蔡安邦（A.P. Tsai）教授による．本稿での掲載を快諾いただき感謝します．

は3次元結晶ではあり得ない*4)．一方で回折像が離散的な輝点をもつのは，その物質が大域的には同一構造の繰り返しを持ち，そのため反射波が共鳴していることを示している．これは新しい物質の内部状態の発見であり**準結晶**と名付けられた．

準結晶の数理モデルとして分子の位置を表す点集合を考えればDelone集合となる．しかしDelone集合であるだけでは，同一構造の繰り返しをもつことが言えない．どこで切っても金太郎飴というかどこで地図を描いても似たようなものを考えたい．準結晶発見よりも10年以上遡るがMeyer[10]は有限集合 $F$ が存在して

$$X - X \subset X + F \tag{1}$$

の成り立つ Delone 集合 $X$ を考えた．これを**Meyer 集合**と言う．研究の一つの動機は，調和解析の理論を準結晶のような非周期的な集合で展開することにあったものと思われる．Meyer 集合は (1) により $F$ が空集合ならば $X$ が群構造をもつので格子となる．$F$ が一点からなる場合も $X$ は格子を平行移動したものになる．

Meyer 集合ならば (1) により $X-X$ も一様離散となる．半径を決めて任意の点の近くの地図を作ると有限個しかない．特に1次元 Meyer 集合はいつでも図3のような有限種類のタイルによるタイル張りをなす．

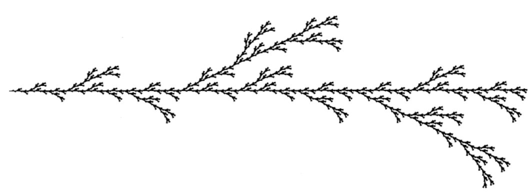
黄金比から作った $S$ はMeyer 集合の例で $F=\{-3,0,3\}$ とすると (1) を満たす．$S-S$ が一様離散になるのは $S$ と同様の Pisot 数の‘反発力’の証明でもわかる．$S$ は左右対称で，どこで切ってもその右側は**非周期的**となる．なぜなら $S$ の元の形から，最小の周期 $M>0$ をとれば $\alpha M$ も周期となる．よって $(\alpha-1)M$ も周期となり最小性に矛盾してしまう．

Meyer 集合は一般のDelone 集合よりも準結晶を考える枠組みとしてふさわしい．Lagarias[8]は $X-X$ が一様離散な Delone 集合と Meyer 集合は同じ概念であることを示した．準結晶のモデルとして著名な**切断射影集合**は Meyer 集合の特別な場合である[8,15]．

## 4. 自然を記述する言語：自己相似性と Pisot 数

結晶学は対称性により構造を分類したので，準結晶も対称性が本質的と思われるかもしれない．だが実際は**自己相似性**を鍵として構造に切り込むことで興味深い数理モデルが得られる．

世の中を説明するのに人間は「簡単なモデルで複雑な現象を説明する」ことを好む．複雑な現象が複雑な理由で起きているというのでは何もわかったような気がしないからだ．心の問題や不条理の世界は文学の題材になっても自然科学では扱われない．自己相似性はそのような数理モデルの典型だ．例えば次の図は自分自身の5つの縮小コピーでできている*5)．



そのことだけ知っていれば簡単に同じ絵を描ける．にも関わらず見た感じは複雑で，自然の樹木の絵のような感じがしないでもない．人間が感じる「自然の美」の要素の一つは自己相似性かもしれない．

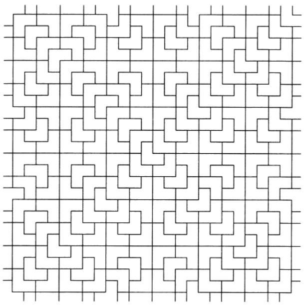
ユークリッド空間の Meyer 集合がこのような自己相似性を持つならば，準結晶の分かりやすいモデルとして最適だろう．

そのような集合はどのような手順で作り出せるだろうか．これは空間の準周期的なタイル張りの問題と考えることができる．有限種類のタイルの組み合わせで空間を埋め尽くし，**拡大細分構造**を持っているものを**自己相似タイル張り**と言う．拡大細分構造とは，一つのタイルを拡大すると幾つ

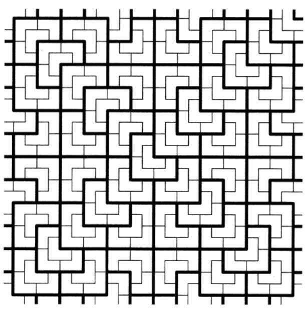
*4) 4次元以上では回転不変面が中心以外には格子点を含まない場合がありこの説明は通用しない．実際に五角対称性を持つ空間群が存在する．

*5) 畑の樹木集合と呼ばれるものの一種で反復写像系のアトラクタの例．植物等の形態を記述する仕組みは文脈自由言語等を用いる形に一般化され L-system[12] と呼ばれている．

かのタイルに分割されるという一種の自己相似構造である．次の図で説明しよう．



は次のように



4つずつブロックに分けられる．太線だけみれば元のタイル張りの相似拡大となっていて一つのタイルを2倍に相似拡大すると4つのタイルに分かれる．これが拡大細分構造である．ブロックの作り方は一意的だ．この自己相似タイル張りは図6の置換操作を繰り返すことで簡単に作れる．これは**椅子タイル**と呼ばれ，上述の一意性により非周期的となる[5]．対応する点集合は格子の部分集合なので面白い Meyer 集合にはならないが拡大率2は Pisot 数であることに注意しよう．

図 3 の集合 $S$ も自己相似タイル張りとなる．原点対称で区間の長さは $a = 1/\alpha$, $b = 1/\alpha^2$, $c = 1/\alpha^3$．原点の右側は $ab$ と $abcb$ の 2 つのブロックからなり，各ブロックを $\alpha^2$ 倍すると $ab \to ab|abcb$, $abcb \to ab|abcb|abcb$ という置換操作の繰り返しによる拡大細分構造をもつ：

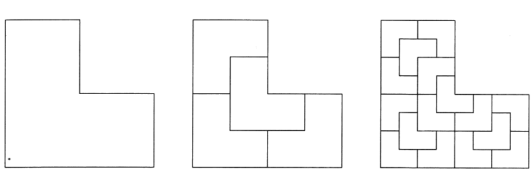


図 6　椅子タイル．

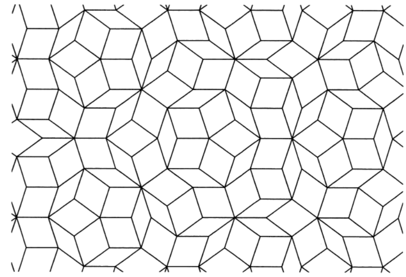


図 7　Penrose タイリング．

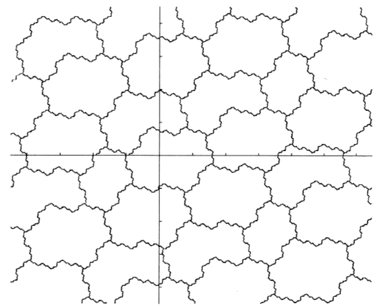


図 8　Rauzy フラクタル．

$$ab\,abcb|ab\,abcb\,abcb|ab\,abcb|ab\,abcb\,abcb|ab\,abcb\,abcb|\cdots.$$

拡大率 $\alpha^2$ は2次の Pisot 数である．強い意味の非周期性で有名な **Penrose タイリング**も拡大率 $\alpha^2$ の自己相似性をもつ．図7のように五角対称性をもつものもある．ただし拡大細分構造は少し複雑で置換操作はタイルの形を完全には保たない[5]．Penrose タイリングや準結晶の入門用の和書として文献 19) もある．

一般に Pisot 数を用いると同様の置換操作のくりかえしにより非周期的で拡大細分構造を持つタイル張りを作ることができる[1,13,18]．図8は3次の Pisot 数を拡大率とする **Rauzy フラクタル**と呼ばれる複素平面のタイル張りである．

この自己相似タイル張りは $x^3 - x^2 - x - 1$ の根の Pisot 数 $\theta = 1.83929$ から作ったもので複素根 $\theta' = -0.41964 - 0.60629i$ の逆数倍（複素平面の相似拡大）をすると，各タイルは他のいくつかのタイルに拡大細分される．このタイル張りの3つのタイルの共有点の集合は2次元の Meyer 集合でそれ自身の $1/\theta'$ 倍を含む．

Thurston–Kenyon[6] は2次元の自己相似タイル張りの拡大率は複素 Perron 数でなくてはならな

いことを示した．ここで複素 Perron 数とは Pisot 数を含む概念で，複素共役を除く他根の絶対値がそれより小のものを言う．Rauzy フラクタルでは $1/\theta'$ は複素 Pisot 数となる．

Bombieri–Taylor[3] は，どのような Delone 集合の回折像が可算個の輝点を持つかを調べる先駆的な仕事を行った．置換の繰り返しでできる 1 次元の自己相似 Delone 集合が輝点を示すためには拡大率に Pisot 数が現れなければならないことが示されている．Senechal の平易な解説書[15]もある．自己相似性タイル張りから得られる点集合の回折像はいつ輝点を含むのか，いつ純点スペクトルとなるか等は重要な問題で，タイル張り力学系のスペクトル型分類と対応させた研究が進んでいる[4,17]．そこでも Pisot 数またはその拡張が本質的な役割を果たす．

一般には Meyer 集合の回折像は輝点を含むとは限らない．にも関わらず Lagarias[9] は実数 $\alpha > 1$ について実軸上の Meyer 集合 $X$ が $\alpha X$ を含むならば $\alpha$ は Pisot 数または Salem 数でなくてはならないことを示した．Salem 数は Pisot 数の親戚で単位円内だけでなく単位円周上にも根を許したものである．黄金比から作った $S$ は $\alpha S$ を含むので，この結果の具体例となる．さらに $S$ は純点スペクトルを示し，切断射影集合の例にもなっている．

このように Pisot 数を用いると自己相似タイル張りが構成でき，その逆に自己相似タイル張りの拡大率は本質的に Pisot 数またはその類似しかない．自己相似性の深部には思いがけない Pisot 数が潜んでいるのである．

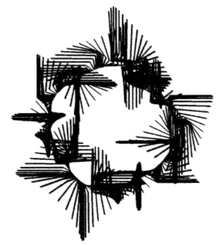
## 参考文献


1) P. Arnoux and Sh. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, Vol.**8**, No.2, pp.181–207, 2001.
2) M.-J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, and J.-P. Schreiber. *Pisot and Salem Numbers.* Birkhäuser, 1992.
3) E. Bombieri and J.E. Taylor. Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections. In *Contemp. Math.*, Vol.**64**, pp.241–264. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
4) N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Vol.**1794** of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer–Verlag, Berlin, 2002.
5) B. Grünbaum and G.C. Shephar. *Tilings and Patterns.* W.H. Freeman and Company, New York, 1987.
6) R. Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geometric and Funct. Anal.*, Vol.**6**, pp.471–488, 1996.
7) L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences.* J. Wiley and Sons, New York, 1974.
8) J.C. Lagarias. Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets. *Comm. Math. Phys.*, Vol.**179**, No.2, pp.365–376, 1996.
9) J.C. Lagarias. Geometric models for quasicrystals I. Delone sets of finite type. *Discrete Comput. Geom.*, Vol.**21**, No.2, pp.161–191, 1999.
10) Y. Meyer. *Algebraic numbers and harmonic analysis.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972.
11) Y. Peres, W. Schlag, and B. Solomyak. Sixty years of Bernoulli convolutions. In *Fractals geometry and Stochastics II*, Vol.**46** of *Progress in Probability*, pp.39–65, 2000.
12) P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The algorithmic beauty of plants.* The Virtual Laboratory. Springer–Verlag, New York, 1990.
13) G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, Vol.**110**, No.2, pp.147–178, 1982.
14) R. Salem. *Algebraic numbers and Fourier analysis.* D.C. Heath and Co., Boston, Mass., 1963.
15) M. Senechal. *Quasicrystals and geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
16) D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol.**53**, No.20, pp.1951–1953, Nov 1984.
17) B. Solomyak. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol.**17**, No.3, pp.695–738, 1997.
18) 秋山茂樹．記号力学系と数系タイル張り．数学, No.**4**, pp.351–365, 2004.
19) R.A. ダンラップ著，岩永恭雄・松井講介訳『黄金比とフィボナッチ数』，日本評論社，2003.



（あきやま・しげき，新潟大学理学部）

# フィボナッチ数と超越数



塩川　宇賢

## 1. リーマン・ゼータ関数の整数点での値

リーマン・ゼータ関数は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

で定義され，全複素平面に解析接続される．この関数は多くの文献で解説されている（例えば文献1）参照）．$\zeta(s)$ の整数点での値はオイラー（1749）によって与えられた．

$$\zeta(-m)=-\frac{B_{m+1}}{m+1}\quad(m=0,1,2,3,\cdots),$$
$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}}{2}\frac{B_{2m}}{(2m)!}(2\pi)^{2m}\quad(m=1,2,3,\cdots).\tag{1}$$

ここで，$B_{2k}$ はベルヌーイ数と呼ばれる有理数で，回帰関係式 $B_0=1$,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}B_j=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義される．$B_{2m+1}=0(m\geqslant 1)$, $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $\cdots$．特に，$\zeta(-2m)=0(m\geqslant 1)$, $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ である．$\pi$ は超越数だから，正偶数点での値 $\zeta(2m)$ は超越数である．一方，正奇数点での値 $\zeta(2m+1)$ については，そのうちのどの1つに対しても，(1) のような既知の数による具体的表示は見つかっていない．それが有理数か無理数かさえ未知であったが，1978年アペリによって，

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots=1.202569\cdots$$

は無理数であることが示された．彼の証明は初等的であるが，$\zeta(3)$ の有理数近似 $\left|\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}\right|<c(1+\sqrt{2})^{-8n}$（$c$ は定数）に際して，$a_n, b_n$ がある回帰関係式を満たすのを確かめる所が面倒である．その後10以上の別証明が与えられている．昨年モスクワ大学で行われたゲルフォント生誕100年記念研究集会でも，リヴォアルにより，フルウィッツ・ゼータ関数 $\zeta(s+z)=\sum_{n\geqslant 1}(n+z)^{-s}$ の有理式による補間級数展開を用いた，$\zeta(3)$ の無理性の新証明が発表されている．彼は2000年に正奇数点での値の中に無限個の無理数があることを示した．またズディリン（2001）は4つの値 $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\zeta(11)$ のうち少なくとも1つが無理数であることを証明した．しかし $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\cdots$ のどの1つも無理数かどうかわかっていない．

## 2. 超越数

整数を係数とする多項式

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

$(n\geqslant 1, a_0\neq 0)$ の根，すなわち $p(\alpha)=0$ を満たす複素数 $\alpha$ を代数的数と言う．代数的数でない複素数を超越数と呼ぶ．超越数のはじめての例はリューヴィル（1844）によって与えられたリューヴィル数

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\cdots$$

である．リューヴィルの発見から 30 年後エルミート(1873)はネピアの数(自然対数の底)$e = 2.71828\cdots$ が超越数であることを証明した．リンデマン(1882)はエルミートの方法を用いて，代数的数 $\alpha \neq 0$ に対し指数関数の値 $e^{\alpha}$ が超越数であることを示した．特に円周率 $\pi = 3.14159\cdots$ は超越数である．なぜなら，$\pi$ が代数的数とすると，オイラーの等式 $e^{i\pi} = -1$ に矛盾するからである．また，代数的数 $\beta \neq 0, 1$ に対して，自然対数 $\log\beta$ は超越数である．特に $\log 2 = 0.69314\cdots$ は超越数である．

$\pi$ の超越性によって，古代ギリシアの三大作図問題の一つ，円の正方化「与えられた円と同じ面積をもつ正方形を作図せよ」が不可能であることが判明した．実際，作図とは単位の長さから出発し，目盛りのない定規とコンパスのみを用いて図形を描くことである．作図できる点はいくつかの直線と円の交点として得られるから，その座標成分は代数的数となる．半径 1 の円の面積は $\pi$ だから，同じ面積をもつ正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{\pi}$ である．$\pi$ は超越数だから，$\sqrt{\pi}$ もそうであり，作図できない．

## 3. フィボナッチ数

フィボナッチ数 $F_n$ は回帰関係式

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geqslant 1),\ F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

で定義される．はじめの数項を表にすると，

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | $\cdots$ |

フィボナッチ数はビネの公式

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (n \geqslant 0) \tag{2}$$

で定義することもできる．ただし

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{黄金数},$$
$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{白銀(シルバー)数}$$

は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 根である．この定義では初期値 $F_0 = 0, F_1 = 1$ を覚える必要がない．初期値を $L_0 = 2, L_1 = 1$ とし，フィボナッチ数と同じ回帰関係式 $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ で定義される数 $L_n$ はルカ数列と呼ばれ，次式を満たす．

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (n \geqslant 0). \tag{3}$$

フィボナッチ数についても多くの文献がある(例えば文献 2) 参照)．

## 4. フィボナッチ数の逆数の和

フィボナッチ数の逆数の和

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = 3.359885\cdots$$

は多くの数学者の関心を集めてきた．カタラン(1878)はこの和を偶数部分と奇数部分

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}}$$

に分けて調べ，偶数部分をランベルト級数で，奇数部分をヤコビの楕円関数の値で表した．後者はランダウ(1899)による次の表示と同値である．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\vartheta_2^2(\alpha^{-2}).$$

ただし，$\alpha$ は黄金数，$\vartheta_2$ はヤコビのテータ級数 $\vartheta_2(q) = 2q^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n-1)}$ である．一方，偶数部分の既知の数による表示は知られていない．

カーリッツ(1971)，エルデス–グラハム(1980)は $S_1$ が無理数かどうかを問題とした．1989 年アンドレジャニンは，アペリの証明に類似する方法で $S_1$ の無理性を証明した．その後，6 つ以上の別証明が見つかっている．しかし，逆数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2m+1}} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

については，そのどの 1 つも無理数かどうかわかっていない．一方，ドゥヴェルネ–西岡(啓)–西岡(久)–塩川(1997)は逆数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2m}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^{m}} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

がいずれも超越数であることを示した．これはその前年に証明されたネステレンコの定理の(彼の表現によれば)驚くべき応用であった．

## 5. ネステレンコの定理

複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ に対して整数を係数とする $m$ 変数多項式 $p(x_1, \cdots, x_m) \not\equiv 0$ が存在して，$p(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = 0$ が成り立つとき，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ は代数的従属であると言う．そうでないとき，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$（または集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$）は代数的独立であると言う．$m = 1$ のとき，$\alpha_1$ の代数的独立性はその超越性を意味する．$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ が代数的独立のとき，その任意の部分集合もそうである．

ラマヌジャン関数 $P(x), Q(x), R(x)$ は

$$P(x) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n},$$

$$Q(x) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{1-x^n},$$

$$R(x) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5x^n}{1-x^n}$$

によって定義される．

**ネステレンコの定理**(1996)．　$\alpha$ を $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数とするとき，$P(\alpha), Q(\alpha), R(\alpha)$ は代数的独立である．

この定理の系として，$\pi$ と $e^\pi$ の代数的独立性が導かれる．1929 年ゲルフォントは，ヒルベルトの第 7 問題の部分的解答として，$e^\pi$ の超越性を証明した．以来 $\pi$ と $e^\pi$ の代数的独立性は超越数論の中心課題の 1 つであった．ヒルベルトの第 7 問題(1900 年，パリの国際数学者会議で提出された 23 問題中の 1 つ)はオイラーの予想を一般化したもので，1934 年ゲルフォントとシュナイダーによって異なる方法で解決された．それが次の定理である．

**ゲルフォント–シュナイダーの定理**．　$\alpha(\neq 1), \beta$ が 0 でない代数的数ならば，$\log_\alpha \beta$ は有理数でない限り超越数である．

言い換えれば，$\alpha(\neq 1), \gamma$ が 0 でない代数的数で $\gamma$ が有理数でないならば，$\alpha^\gamma$ は超越数である．

例えば，次の数はいずれも超越数である．

常用対数 $\log_{10} 2 = 0.301029\cdots$，

$e^\pi = i^{-2i}$，　$2^{\sqrt{2}}$．

$e^\pi$ はゲルフォント数と呼ばれている．(2, 4, 5 節については文献 3, 4) 参照.）

複素数 $k \neq 0, \pm 1$ を母数とする第 1 種，第 2 種完全楕円積分 $K = K(k), E = E(k)$ は $k^2 \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty))$ に対して，

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

で定義される．ただし，各被積分関数の分枝は $t \to 0$ のとき 1 に近づくものとする．さらに，

$q = e^{-\pi c}$, $c = K'/K$, $K' = K(k')$, $k^2 + k'^2 = 1$

とおく．ラマヌジャン(1916)は次式を示した．

$$P(q^2) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left(\frac{3E}{K} - 2 + k^2\right),$$

$$Q(q^2) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4(1 - k^2 + k^4),$$

$$R(q^2) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6\frac{1}{2}(1+k^2)(1-2k^2)(2-k^2).$$

上式より，次のネステレンコの定理の系を得る．

**系**．　$q = e^{-\pi c}$ を $0 < |q| < 1$ を満たす代数的数とするとき，$K/\pi, E/\pi, k$ は代数的独立である．

## 6. フィボナッチ・ゼータ関数の整数点での値

ナヴァス(2001)，江上繁樹(2002)はディリクレ級数

$$\zeta_F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_k^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

を全複素平面に解析接続し，その性質を調べた．ここで $n \in \{F_k | k \geqslant 1\}$ のとき $a_n = 1, n \notin \{F_k | k \geqslant$

1} のとき $a_n=0$ である．$\zeta_F(s)$ をフィボナッチ・ゼータ関数と呼ぶ．$\zeta_F(s)$ は, $\zeta(s)$ を特徴づけているオイラー積, 関数等式, 非自明零点の存在といった性質をもたないようである．昨年ストイデングは $\zeta_F(s)$ が, $\zeta(s)$ と同様に, いかなる代数的微分方程式も満たさないことを注意した．これはディリクレ級数に関するライヒの定理とフィボナッチ数列が無限に多くの異なる素因子を含む事実から従う．後者はルカの定理 $\gcd(F_m,F_n)=F_{\gcd(m,n)}$ と $F_1=1$ からわかる．

$\zeta_F(s)$ の整数点での値であるが, 負奇数点では,

$$\zeta_F(-m)=\frac{1}{5^{(m-1)/2}}\sum_{j=0}^{(m-1)/2}(-1)^{j+1}\binom{m}{j}\frac{F_{m-2j}}{L_{m-2j}} \quad (m=1,3,5,\cdots),$$

となる．負偶数点では, $\zeta_F(-m)=0\,(m=2,6,10,\cdots)$ となる一方, $s=0,-4,-8,\cdots$ で単純極をもつ．

正整数点での値については, 4 節で述べたように, $S_1=\zeta_F(1)$ は無理数, $\zeta_F(2m)$ ($m$ は正整数) はすべて超越数である．これは $\zeta(3)$ の無理性, $\zeta(2m)$ ($m$ は正整数) の超越性と符合している．$\zeta(5),\zeta(7),\cdots$ と $\zeta_F(3),\zeta_F(5),\cdots$ の無理性が不明な点も共通している．オイラーの公式 (1) は

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}}{2}\frac{24^m B_{2m}}{(2m)!}\zeta(2)^m \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

と書けるから, リーマン・ゼータ関数の 2 つの正偶数点での値 $\zeta(2m_1),\zeta(2m_2)$ は代数的従属である．フィボナッチ・ゼータ関数の場合はどうであろうか．エルスナー–下村俊–塩川 (2006) は次の結果を得た．

**定理 1**[5]**.** $\zeta_F(2),\zeta_F(4),\zeta_F(6)$ は代数的独立である．さらに, 任意の偶数 $2m\geqslant 8$ に対して, $\zeta_F(2m)$ は $\zeta_F(2),\zeta_F(4),\zeta_F(6)$ の有理式で表される．より詳しくは,

$$\zeta_F(2m)=c_{2m}\zeta_F(4)+\frac{P_{2m}(\zeta_F(2),\zeta_F(6))}{(4\zeta_F(2)+5)^2} \quad (m=4,5,6,\cdots). \quad (4)$$

ただし, $c_{2m}$ は有理数 ($m$ が奇数のときは 0), $P_{2m}(x,y)$ は有理係数多項式であり, いずれも具体的に表示できる．

(4) はフィボナッチ・ゼータ関数に対するオイラーの公式と見ることができる．同式より $\zeta_F(s)$ の 4 つ以上の正偶数点での値が代数的従属であることがわかる．それでは 3 つ以下の正偶数点での値についてはどうであろうか．

**定理 2**[6]**.** $m_1,m_2,m_3$ を異なる正整数とするとき, $\zeta_F(2m_1),\zeta_F(2m_2),\zeta_F(2m_3)$ が代数的独立であるための必要十分条件は, $m_1,m_2,m_3$ のうちの少なくとも 1 つが偶数であることである．

定理 2 は次のように言い換えてもよい. $\zeta_F(2m_1),\zeta_F(2m_2),\zeta_F(2m_3)$ が代数的従属である $\Leftrightarrow$ $m_1,m_2,m_3$ がすべて奇数である．

2 つの値 $\zeta_F(2m_1),\zeta_F(2m_2)$ の場合は, 第 3 の値 $\zeta_F(2m_3)$ ($m_3$ は偶数) を付け加えれば, 3 つの値は代数的独立となるから,

**系.** フィボナッチ・ゼータ関数の 2 つの異なる正偶数点での値は常に代数的独立である．

**例.** $m_1=1,m_2=3,m_3=5$ と選ぶことにより, $\zeta_F(2),\zeta_F(6),\zeta_F(10)$ は代数的従属である．実際, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&297\Big(4\zeta_F(2)+5\Big)^2\zeta_F(10)-\Big(4760\zeta_F(2)\\&+3500\Big)\zeta_F(6)^2+\Big(1600\zeta_F(2)^4-12800\zeta_F(2)^3\\&-11250\zeta_F(2)^2-9375\zeta_F(2)-9375\Big)\zeta_F(6)\\&-512\zeta_F(2)^7+3520\zeta_F(2)^6-4050\zeta_F(2)^5\\&+3750\zeta_F(2)^4+9375\zeta_F(2)^3=0.\end{aligned}$$

## 7. 種々のディリクレ級数の値

ディリクレ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_n^s},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_n^s},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{L_n^s} \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

の正偶数点での値についても，$\zeta_F(s)$ と類似の結果が成り立つ[5)]．例えば，3 番目の級数を $\xi(s)$ とおくと，$\xi(2), \xi(4), \xi(6)$ は代数的独立であり，$\xi(2m)(m \geqslant 4)$ は 4 つの数 $\xi(2), \xi(4), \xi(6)$ および 2 次方程式

$$x^2 - \Big(192\xi(4) - 6\Big)x + 1920\xi(6) - 64\xi(2) - 7 = 0$$

の 1 つの根の有理数係数有理式で具体的に表示される．$\zeta_F(s)$ のオイラーの公式 (4) は，このような方程式の根を含まない点で，(幸運にも) より単純であった．

以上 4 つのディリクレ級数の $s = 2, 4, 6$ での値

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^s}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n^s}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^s}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{L_n^s} \quad (s = 2, 4, 6)$$

の代数的独立性を考える[8)]．これら 12 個の数から選んだ 4 つの数は代数的従属であり，2 つの数は代数的独立であることがわかる．また 3 つの数の選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 通りあるが，そのうち 22 通りの場合に，選ばれた 3 つの数が，代数的従属となる．ブルックマン (1977) は次の等式を示している．

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^2} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2} = 4\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}}\right)^2$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^2} + 10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n-1}^2}.$$

上述 22 個の 3 元集合の数の代数的従属関係から，興味深い等式が得られる．そのうちの 2，3 を紹介すると，

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n^2} - 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{L_n^2} = 0,$$

$$4\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{L_n^2}$$
$$-6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^4} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^2}\left(8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2} + 1\right) - 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2}$$
$$-20\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{L_n^4} = 0.$$

## 8. 退化極限としてのオイラーの公式

公式 (2), (3) で，$\beta(= -\alpha^{-1}, |\beta| < 1)$ を変数とみると，フィボナッチ数の逆数の和は $\beta$ の関数とみることができる．いま，

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad V_n = \alpha^n + \beta^n \quad (n \geqslant 0)$$

とおき，$\beta$ の関数

$$h_{2m} = (\alpha - \beta)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{2n}^{2m}}, \ g_{2m-1}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{V_{2n-1}^{2m-1}}$$

($m$ は正整数) を考えよう．このとき，$h_{2m}$ は $h_2$, $h_4, h_6$ の有理数係数多項式で表される．特に $\beta$ が代数的数のときは，$h_2, h_4, h_6$ は代数的独立である[6)]．以後 $\beta$ が代数的という仮定をはずす．$\beta$ と $k$ との間には，$\beta = e^{-\pi K'/(2K)}$ の関係があり，$K, K'$ はそれぞれ $k^2, 1 - k^2$ の超幾何関数として表現される．この事実を使って，$-1 < \beta < -1 + \delta_0$ ($\delta_0$ は十分小) に対して，次の漸近公式を得る．

$$(\alpha^2 - \beta^2)^{2m} h_{2m}$$
$$= \left(1 + O\left(e^{-\pi^2/(2\eta)}\right)\right) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{(m)} \eta^j. \qquad (5)$$

ここで $\beta \to -1+0$ とするとき，$\eta = -\log(-\beta) \sim 1 + \beta \to +0$ である．(5) の右辺の級数は収束しており，$\lambda_j^{(m)}$ は $\pi$ の有理数係数多項式である．特に，

$$\lambda_0^{(m)} = \frac{(-1)^{m-1}}{2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} (2\pi)^{2m} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots).$$

一方，$\beta \to -1+0$ とするとき，$U_{2m} = \alpha^{2(n-1)}\beta^2 + \alpha^{2(n-2)}\beta^4 + \cdots + \beta^{2(n-1)} \to n$ だから，(5) の左辺は $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m} = \zeta(2m)$ に近づく．すなわち，(5) より極限操作 $\beta \to -1+0$ によって，オイラーの公式 (1) が導かれる．

さらに $g_{2m-1}^*$ についても漸近公式

$$(\alpha + \beta)^{2m-1} g_{2m-1}^* = \left(1 + O\left(e^{-\pi^2/(2\eta)}\right)\right),$$

$$\mu_0 = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}} \frac{E_{2m-2}}{(2m-2)!} \pi^{2m-1}$$

が成り立ち，$\beta \to -1+0$ とすれば(またしても)オイラーの公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{2m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}} \frac{E_{2m-2}}{(2m-2)!} \pi^{2m-1} \qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

を得る[9]．ここで $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, \cdots$ はオイラー数と呼ばれる整数である．

## 9. 主定理の証明

定理 1, 2 の証明は次の 3 つの命題に基づく．

**I.** ネステレンコの定理(の系)．

**II.** $\zeta_F(2m)$ の $\frac{K}{\pi}, \frac{E}{\pi}, k$ による表示式．$q = \beta^2$ ($\beta$ は白銀数)のとき，

$$-\frac{24}{5}\zeta_F(2) + 1 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1-2k^2),$$

$$\frac{1440}{25}\zeta_F(4) + 11 = 10\left(\frac{2K}{\pi}\right)\left(12\frac{K}{\pi}\frac{E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}(5-4k^2)\right) + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (1-16k^2+16k^4),$$

$$-\frac{120960}{125}\zeta_F(6) + \frac{4032}{25}\zeta_F(2) + 23 = 2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (1-2k^2)(1-31k^2+31k^4) + 21\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (1+14k^2-14k^4),$$

および $\zeta_F(8), \zeta_F(10), \cdots$ に対する同様の表示式．

**III.** 代数的独立性の判定基準．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を代数的独立な複素数，$g_i = U_j(x_1, \cdots, x_n)/V_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(j = 1, \cdots, n)$ とする．ここで，$U_j(X_1, \cdots, X_n), V_j(X_1, \cdots, X_n)$ は有理数を係数とする $n$ 変数 $X_1, \cdots, X_n$ の多項式である．さらに，

$$P_j(X_1, \cdots, X_n) = U_j(X_1, \cdots, X_n) - g_j V_j(X_1, \cdots, X_n)$$

とおく．このとき，

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial X_1} & \frac{\partial P_2}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial X_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial X_2} & \frac{\partial P_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial X_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial X_n} & \frac{\partial P_2}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{(X_1, \cdots, X_n) \\ = (x_1, \cdots, x_n)}} \neq 0$$

ならば，$g_1, \cdots, g_n$ は代数的独立である．

定理 1 で $\zeta_F(2), \zeta_F(4), \zeta_F(6)$ の代数的独立性は I と II から，(4) は II の表示式から $K/\pi, E/\pi, k$ を消去して得られる．定理 2 は II の表示式に III $(n=3, x_1 = k, x_2 = \frac{2K}{\pi}, x_3 = \frac{E}{\pi}, V_j = 1)$ を用いて証明される．

末筆ながら，原稿作成にあたり助言を頂いた慶大理工学部下村俊氏に感謝の意を表する．

### 参考文献


1) 松村耕二，『リーマンのゼータ関数』，朝倉書店．
2) 中村滋，『フィボナッチ数の小宇宙』，日本評論社．
3) 塩川宇賢，『無理数と超越数』，森北出版．
4) ダニエル・ドゥヴェルネ著，塩川宇賢訳，『数論』，森北出版．
5) C. Elsner, S. Shimomura, and I. Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci numbers, *Acta Arith.* **130**. **1** (2007), 37–60.
6) ——, Algebraic relations for reciprocal sums of even terms in Fibonacci numbers, to appear in *St. Petersburg Math. J.*
7) ——, Algebraic independence results for reciprocal sums of Fibonacci numbers, preprint (2007).
8) ——, Exceptional algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci and Lucas numbers, preprint (2007).
9) ——, Asymptotic representations for Fibonacci reciprocal sums and Eulers formulas for zeta values, preprint (2007).


(しおかわ・いえかた，慶應義塾大学名誉教授)

# 3とクォーク



大貫 義郎

## 1. はじめに

自然界に存在するものはすべて何種類かの素粒子と呼ばれる要素からできていると考えられてきた．原子の中で原子核の周囲を回っている電子やまた原子核を構成する陽子や中性子（これらはまとめて**核子**と呼ばれている）などは代表的な素粒子として知られている．もちろんこればかりではない．中性子の崩壊の際に電子とともに放出される質量の非常に軽いニュートリノ，また光を作る質量ゼロの粒子である光子，さらには原子核内にあって核子間に強い結合力を生み出す湯川中間子（**パイオン**と呼ばれる）もまた一種の素粒子と見なされ，そうしてこれらの間の相互作用が物質の振舞いを規定する上で決定的な役割を演じると考えられてきた．これが，第2次世界大戦終了以前に我々の具体的に知っていた素粒子のすべてである．

ところが戦後，測定機器や実験技術の急速な進歩に伴い次々と新しい素粒子が見つかってきた．そうするとまず手始めにこのような多種類の素粒子をどのように整理し分類するかという問題が起こる．素粒子の振舞いを特徴づけるものとしては，(i) 質量，(ii) スピン，(iii) その素粒子に特有の相互作用，といったものが考えられる．このうちスピンというのは粒子が静止していても失われることのない粒子固有の角運動量である．ただし古典論には対応するものがなく，純粋に量子論的な量であって，その大きさは $0, 1/2, 1, \cdots$ といった値をとる[*1]．例えば電子，陽子，中性子のスピンは $1/2$，パイオンのスピンは0である．また (iii) の素粒子の相互作用には強・弱・電磁の3種類があることがわかってきた．

このうち**電磁相互作用**は，電荷を帯びた素粒子の間にクーロン力を生み出し，また電磁波を構成する光子の吸収・放出を行うという働きをする．以下では，素粒子のもつ電荷の量は，陽子の電荷を1とし，これを基準にして記すことにしよう．例えば，陽子，中性子の電荷はそれぞれ1および0，パイオンには質量がほぼ等しい $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ の3種があって，それぞれの電荷は $1, 0, -1$ である．

ところで電磁相互作用に比して，これより約100倍ほど強い相互作用に**強相互作用**と呼ばれるものがある．核子とパイオン間の相互作用は古くから知られている強相互作用の例であるが，後で述べるようにこれ以外にも強相互作用を行う素粒子はいろいろある．しかしすべての素粒子がこの相互作用をするわけではない．例えば電子やニュートリノや光子は強相互作用を行わない．強相互作用を行う素粒子はまとめて**ハドロン**と呼ばれ，これらが今回の話の主役となる．

なお，ほとんどすべての素粒子には，電磁相互作用に比べるとはるかに微弱な**弱相互作用**をするという性質が備わっている．多くの素粒子が固有の平均寿命で質量の軽いいくつかの素粒子に崩壊

*1） このノートでは Planck 定数 $h$ を $2\pi$ で割った $\hbar$ および光速 $c$ を1とする単位系を用いる．

するのはこの相互作用を媒介にする．例えば，中性子が陽子と電子と反ニュートリノに崩壊するいわゆるベータ崩壊は，弱相互作用に起因する[1]．

## 2. ハドロンからクォークへ

強相互作用をする素粒子であるハドロンは，かつては核子とパイオンだけであったが，1947年頃からこれとは振舞いの異なるものが次々と見つかってきた．当時それらは**新粒子**と呼ばれ，その正体を巡って様々な議論が行われるが，曲折ののち最初のゴールに達したのは6年後の1953年であった．それはハドロンを特徴づけるものとして抽出された4つの量 $Q, T_3, N_B, S$ の間の関係で次式にまとめられ，中野・西島・Gell-Mannの法則と呼ばれる．

$$Q = T_3 + \frac{N_B + S}{2}. \tag{2.1}$$

ここで $Q$ はハドロンの電荷，また $T_3$ は**アイソスピン**と呼ばれる量の第3成分を表す．アイソスピン（大きさを $T$ と略記）は通常のスピンと似た顔をしているが，現実の空間内での量ではない．**アイソ空間**[*2]という仮想の3次元空間を考え，そこでの座標軸の向きを変えた場合，通常のスピンと同型の変換を受ける量である．そうしてスピンの $z$ 成分に対応するのがアイソ空間での $T_3$ である．与えられた $T$ の下で $T_3$ のとる様々な値は[*3]，質量のほぼ等しいハドロン間の電荷の違いを表す．例えば $T=1/2$ は2成分で状態が記述され，$T_3 = 1/2$ が陽子，$T_3 = -1/2$ が中性子を表すことになる．またパイオンは $T=1$ で，$T_3 = 1$, 0, $-1$ がそれぞれ $\pi^+$，$\pi^0$，$\pi^-$ を記述する．他のハドロンについては後に述べるが，このようにアイソ空間の座標軸の向きを勝手に変えて眺めることが許されるならば，それは，同じアイソスピンをもつ粒子間で電荷が異なっていても，強相互作用の下では，それらの振舞いに区別がないことを意味する．この性質は**荷電独立性**と呼ばれ，よく成り立っていることが実験でも分かっていた．抽象的には3次元のアイソ空間での回転群つまり $SU(2)$ の下で，強相互作用の理論は近似的に不変であり，質量のほぼ等しいハドロンはそれらの質量差を無視する限りにおいて，この群の既約表現に従って変換するということができる．では核子やパイオン以外にはどんなハドロンが存在しそれが如何なる既約表現に属するのであろうか．

その前に(2.1)式に現れる $N_B$ と $S$ を説明しておこう．ハドロンにはスピンが半整数のものと整数のものがある．前者は**バリオン**，後者は**メソン**と呼ばれる．バリオンは概して質量が大きく最も軽いのが陽子である．バリオンの特徴は，すべての相互作用においてその数[*4] $N_B$ が保存することが挙げられる．他方メソンは，いずれも $N_B = 0$ であって，バリオン数の保存には寄与しない．

$S$ はストレンジネス（strangeness）と呼ばれて整数値をとり，核子やパイオンは $S=0$ であって，$S \neq 0$ となるのはいわゆる新粒子である．新粒子はその振舞いから，初め“奇妙な粒子”（strange particle）とも呼ばれた．そうしてその奇妙さを表す量としてこの $S$ が使われたようである[*5]．ハドロンの系において，各ハドロンのもつ $S$ の総和は強相互作用や電磁相互作用のもとでは保存すると見なされる．

核子やパイオンを含め比較的質量の小さいバリオンとメソンを表1と表2に掲げておこう．もちろんこれはハドロンのほんの一部に過ぎず，アイソスピンのもっと大きな粒子やストレンジネスの値がこれと異なるものも知られている．詳しくは例えば『理科年表』などを参照されたい[2]．ここで質量はエネルギーに換算してMeV（1電子ボルト

*2） 荷電区間とも言う．

*3） アイソスピン $T$ の値は通常のスピンと同様に非負の整数または半整数．与えられた $T$ に対し $T_3$ は $T, T-1, \cdots, -T+1, -T$ の $2T+1$ 個の値をとる．

*4） 正確には「粒子数 − 反粒子数」．それゆえ陽子2個と反中性子1個からなる系のバリオン数 $N_B$ は1である．以下，陽子数 $N_p$，中性子数 $N_n$，またあとに出てくる $\Lambda$ 粒子数 $N_\Lambda$ など，粒子の数は，断りがない限り，すべて粒子数から反粒子数を引いたものとして用いられる．

*5） strangeness は Gell-Mann による命名．中野・西島の論文ではこれを $\eta$-charge と呼んだ．

**表 1** バリオン（$N_B = 1$）の例．

| 粒子 | $T$ | $T_3$ | $S$ | $Q$ | 質量（MeV） |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 938 |
| $n$ | | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 0 | 940 |
| $\Lambda$ | 0 | 0 | −1 | 0 | 1116 |
| $\Sigma^+$ | 1 | 1 | −1 | 1 | 1189 |
| $\Sigma^0$ | | 0 | −1 | 0 | 1192 |
| $\Sigma^-$ | | −1 | −1 | −1 | 1189 |
| $\Xi^0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | −2 | 0 | 1315 |
| $\Xi^-$ | | $\frac{-1}{2}$ | −2 | −1 | 1321 |

**表 2** メソン（$N_B = 0$）の例．

| 粒子 | $T$ | $T_3$ | $S$ | $Q$ | 質量（MeV） |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^+$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 140 |
| $\pi^0$ | | 0 | 0 | 0 | 135 |
| $\pi^-$ | | −1 | 0 | −1 | 140 |
| $K^+$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 494 |
| $K^0$ | | $\frac{-1}{2}$ | 1 | 0 | 498 |
| $\overline{K^0}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | −1 | 0 | 498 |
| $K^-$ | | $\frac{-1}{2}$ | −1 | −1 | 494 |
| $\eta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 548 |

の 100 万倍）を単位として書かれており，小数点以下は四捨五入してある．ちなみに電子の質量は約 0.51 MeV である．

すべての素粒子にはそれの反粒子が存在する．$N_B$，$T_3$，$S$，$Q$ の値は反粒子では，逆転してマイナス符号がつく．反粒子はしばしば粒子の記号にバーをつけて表す．例えば $\bar{p}$ は陽子 $p$ の反粒子，つまり反陽子である．また $\overline{K^0}$ は $K^0$ の反粒子であるが，$K^+$ と $K^-$ は互いに粒子・反粒子の関係にあって，$\overline{K^\pm} = K^\mp$ である．同様に荷電パイオンに関しても $\overline{\pi^\pm} = \pi^\mp$ が成り立っている．ただし中性の $\pi^0$ と $\eta$ の反粒子は自分自身に等しく $\overline{\pi^0} = \pi^0$，$\bar{\eta} = \eta$ である*6)．

中野・西島・Gell-Mann の法則は，発表された当時実験データは必ずしも豊富でなく，ハドロン分類の一つの可能性と見られたが，その正当性が確立するのに時間はかからなかった．例えば，$\Xi^0$ は当時まだ見つかっていなかったが，$\Xi^-$ の崩壊の特徴からこれに $T = \frac{1}{2}$，$S = -2$ が与えられて，$\Xi^-$ のパートナーとして $\Xi^0$ の存在が予想され，間もなくそれが実験で確認されたのである*7)．

中野・西島・Gell-Mann の法則の重要性にいち早く着目したのは坂田（昌一）博士である．博士は 1955 年秋の日本物理学会で「すべてのハドロンは，陽子，中性子，$\Lambda$ およびそれらの反粒子からなる複合系である」とするハドロンの複合模型を提唱した．のちに**坂田模型**と呼ばれるものである．ここでは (2.1) の右辺において系のアイソスピンは陽子と中性子が担い，ストレンジネスは $\Lambda$ が，そしてバリオン数は $p$，$n$，$\Lambda$（以下，基本粒子と呼ぶ）が担うことになる．これらを式で書くならば，$T_3 = \frac{1}{2}(N_p - N_n)$，$S = -N_\Lambda$，$N_B = N_p + N_n + N_\Lambda$ である．そうしてこの関係を (2.1) の右辺に代入すると $Q = N_p$ となって，中野・西島・Gell-Mann の関係式は，坂田模型から見れば至極当然の結果となる．つまりこの模型では電荷をもっているのは陽子だけであるから，与えられたハドロンの系の全電荷はそこにある陽子数に他ならない*8)．この模型では，表 1 のバリオンは，基本粒子以外は基本粒子 2 個と反基本粒子 1 個からなる結合系，また表 2 のメソンは基本粒子 1 個と反基本粒子 1 個の結合系として与えることができる*9)．

このようにして，坂田模型は素粒子論の進展に一つの方向を与えたが，一歩進んでそこに述べら

*6) すべての素粒子において，粒子と反粒子の質量，スピンおよび（それが不安定粒子の場合）平均寿命は，厳密に等しい．ハドロンで粒子と反粒子が一致するには $N_B = T_3 = Q = S = 0$ が必要である．なお光子の反粒子は光子自身である．

*7) 表 2 の $\eta$ の存在は (2.1) からは予測できない．その発見はずっと遅れて 1961 年になるが，後の議論の都合上ここに記載した．

*8) 3 種の基本粒子によって全ハドロンを構成するという考えは trichotomy（3 元論）として，西欧の dichotomy(2 元論）的発想よりも湯川博士は親近感をもたれたようである．思考のプロセスで，yes と no だけを用いるのではなく，yes でも no でもないものも考慮するという行き方が日本にはある，という意味のことをかつて語られたことがある．

*9) 具体的にそれが基本粒子のどのような構成になるかは，角運動量の合成則をアイソスピンの合成に適用すれば求められるが，いまはそれには立ち入らない．

れた結合系を実際に計算し，結果を実験と比較するという作業は容易とは言えなかった．一つには基本粒子間の相互作用の形が分かっていなかったことと，二つにはたとえそれを適当に仮定したとしても結合力が非常に大きいために信頼できる計算法が見出せなかったからである．

ところが，1959 年全く別のアプローチが筆者らによって提案された．そうしてこれが，素粒子論における本格的な対称性理論の嚆矢となったのである[3]．荷電独立性は，坂田模型においては，陽子と中性子の違いを無視した $SU(2)$ の変換で理論が不変であることを意味する．では，これを拡張し坂田模型で 3 個の基本粒子間の違いを無視したらどうであろうか．種々の検討を経て，これは $(p, n, \Lambda)$ を基本表現とする 3 行 3 列のユニタリー行列のつくる群 $U(3)$ の下での理論の不変性という仮定に帰着した．もしこれが正しければ，$U(3)$ の同一の既約表現に属する粒子は共通の性質をもつはずである．分析の結果，表 2 の中間子は，そのままこの群の 8 次元の既約表現に属し，パイオンと性質の似た $T=0$ のメソン $\eta$ が存在するはずであった[*10]．他方，バリオンにおいては，$\Lambda$, $\Sigma$, $\Xi$ はそれぞれ異なる既約表現に属することになったが，この結果は散乱現象を含めて当時の実験データとは一応整合しているように思われた．

1961 年，表 1 の 8 個のバリオンも，表 2 のメソンと同様に，8 次元の既約表現に属するとする考えが Gell-Mann と Ne'eman により独立に提案された．eightfold way（八道説[*11]）と呼ばれる．坂田模型の $U(3)$ 理論では $N_B=1$ の 8 次元表現は存在しない．それゆえ eightfold way を採用するには，$N_B$ を表面から消して代わりに $Y \equiv N_B+S$ を用いる必要がある[*12]．これには位相変換の自由度を落とした群 $SU(3)$ が強相互作用を不変にするものとして採用された．ただし eightfold way ではこの群の任意の既約表現が自然界に実現するとは考えない．何らかの理由により，8 次元表現の合成によってつくられる既約表現のみが自然界には実現するということが仮定された．eightfold way という言葉の所以である．

1961 年の頃は坂田模型の $U(3)$ 理論と Gell-Mann・Ne'eman の eightfold way との優劣はつけ難かったが，実験データが蓄積されるにつれ，バリオンに関しては後者の優位性が次第にはっきりしてきた[*13]．そうして 1964 年 2 月，eightfold way で予想されていたストレンジネス $-3$ のバリオン $\Omega^-$ が発見される．$U(3)$ 理論にはこのような粒子は存在しない．これにより eightfold way の成功は決定的になったと言える．しかしそれにも関わらず，坂田模型の $p, n, \Lambda$ と異なり，eightfold way にはそこでの対称性の支えとなる物質的な基盤というものがない．そういう点で，これは甚だ座りの悪い理論と言わざるを得なかった．

こういうこともあってか，この年 Gell-Mann は彼が**クォーク**（quark）と名付けた 3 種の奇妙な粒子 $u$, $d$, $s$（up, down, strange）の導入を試みた．これは坂田模型における 3 種の基本粒子の $SU(3)$ ヴァージョンと言うべきもので，その性質は表 3 に掲げてある（ただし質量は現在の推定値）．クォークは核子や $\Lambda$ と同様にそのスピンは 1/2 であるが，この表に見るように電荷は 2/3 あるいは $-1/3$ という分数値をとる．もともと陽子や電子の電荷は電気素量と呼ばれ，これ以上の分割は不可能と見なされてきた．またクォークのバリオン数 $N_B$ は 1/3 であって，この模型ではバリオンは 3 個のクォークから，またメソンはクォーク，反クォー

**表 3**　3 種のクォーク（$N_B=\frac{1}{3}$）．

| クォーク | $T$ | $T_3$ | $Y$ | $Q$ | 質量（MeV） |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 1.5〜3.5 |
| $d$ | | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | $3\sim7$ |
| $s$ | 0 | 0 | $\frac{-2}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | $95\pm25$ |

*10）我々はこれを $\pi^{0\prime}$ と呼んでいたが，のちに実験でその存在が確認された．脚注 7 参照．

*11）湯川博士は八正道と訳された．

*12）実際表 1，2 において，$N_B$ と $S$ の値を隠して $Y$ を用いると，$T$ と $Y$ の対応はそれぞれの表で完全に一致し，また (2.1) 式も簡易化される．$Y$ は hypercharge と呼ばれた．

*13）メソンに対しては両者は同じ結果を導き，表 2 以外の例えばスピン 1 のメソンなどでも，ともに成功を収めた．

クそれぞれ1個からつくられていると考えられた．しかしなぜかクォークは単離して存在しない．**クォークの閉じこめ**と呼ばれる現象である．このような異様な性質のためにGell-Mannは，クォークは目下の数学的な手段であって実在性に乏しく，理論が完成すればいずれ消え去るであろうと断っている．この論文は，アメリカの雑誌に投稿すると掲載を拒否されるかも知れないということで，ヨーロッパの雑誌に発表された．同じ頃，ZweigはAceと名付けてGell-Mannとは独立にクォークと同じ構想に達した．これは雑誌には公表されず，プレプリントの形で広く配布された．しかしこのために彼はある著名な大学との契約を，そこの有力教授によってブロックされたとのことである．理由は，彼の論文は"おおぼら吹きの仕事"（the work of a charlatan）ということであったという．クォークは危険思想と見なされたのであろう．

## 3. 3色のクォーク

$q_1=u, q_2=d, q_3=s$ と書いて，$q_\alpha$ $(\alpha=1, 2, 3)$ で3種類のクォークを表すことにしよう．$SU(3)$ の変換では $q_\alpha$ は $q_\alpha \to \sum_\beta U_{\alpha\beta}\, q_\beta$ なる変換を受ける．ここで $U$ は $\det U=1$ の3行3列のユニタリー行列であって，$q_\alpha$ の添字 $\alpha$ で表される自由度は**ユニタリースピン**と呼ばれている．

$SU(3)$ の成功に伴って，これを応用した現象論的な分析やあるいは変形・拡張する対称性に関する仕事が数多く現れた．なかでも崎田（文二）氏やGürseyとRadicattiによる $SU(6)$ 理論は，クォーク模型との関係で注目を引いた．クォークはスピンが1/2で，これの上向き・下向きを表す $i=1, 2$ の自由度を伴う．そこで彼らは，ユニタリースピンに加えてこの自由度をも考慮した6個の量 $q_{i,\alpha}$ $(i=1, 2,\ \alpha=1, 2, 3)$ を6行6列の任意のユニタリー行列（ただし行列式は1）で変換したときに理論形式は不変であると考え，スピンの異なる粒子をも一つの既約表現に取り込むことを提案した．$SU(6)$ 理論と呼ばれるものである．まずクォーク・反クォークからなるメソンの状態は，この群の1次元または35次元の既約表現に入る．この後者にどのようなスピン，ユニタリースピンの状態が含まれているかを見てみよう．スピンが $J$ 次元，ユニタリースピンが $D$ 次元の既約表現に属する状態を $\langle J, D\rangle$ と書くと，上記の35次元表現には $\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 8\rangle$ が含まれている．最初のものはスピン0で，表2の8個のメソンにちょうど対応する．あとの2つはともにスピン1の粒子で，$SU(3)$ の1次元と8次元表現を表し，実験ではこれらにうまく対応するものが確認されている．しかも35次元表現では結合系のエネルギーは最低状態にあり，クォーク，反クォークの軌道角運動量はともに0と見なされる．これはパリティが奇の状態を与え，実験と一致する．

それではバリオンはどうであろうか．バリオンの状態は，それを構成する3個のクォークそれぞれのスピンとユニタリースピンの添字の組 $(i, \alpha)$ を相互に丸ごと入れ換える任意の変換で完全に対称であると仮定する．これは $SU(6)$ の56次元の既約表現をつくり，そこには $\langle 2, 8\rangle$ と $\langle 4, 10\rangle$ が含まれる．前者はスピン1/2で表1の8個のバリオンを表す．また後者はスピンが3/2で $SU(3)$ の10次元表現だが，ここに属する粒子はすべて実験で確認されていた．先に述べた $\Omega^-$ もその一つである．

このようにして $SU(6)$ 理論は大いに成功を収めたが，しかしその背後には原理的な問題が残されていた．56次元表現はバリオンの最低エネルギーの状態と見なされるからクォーク間の相対軌道角運動量はゼロ，したがって波動関数はクォークの位置座標の入れ換えに対して完全に対称になる．これは明らかにスピン半整数の粒子が従うべきフェルミ統計に反している．なぜならば，仮定により添字 $(i, \alpha)$ の入れ換えでも状態は完全に対称であるからである．

この困難を克服するために様々な試みがなされたが，結局Gell-Mannによってその解決案が示された．彼はクォークを指定する変数をもう一つ増やして $(i, \alpha)$ から $(i, \alpha, \xi)$ とし，$\xi=1, 2, 3$ としてこの自由度を**カラー**（color）と呼んだ．つま

りクォークは $q_{i,\alpha,\xi}$ と書かれ，どれも $\xi$ で示される3つの“色”を持つ．そうしてバリオンを構成する3個のクォークはカラーの添字について完全に反対称であるとした．こうすればフェルミ統計と整合する．

ところで実験では，カラーは全く見つかっていない．そればかりかこの自由度が表に出ることも強く禁止されているらしいのである．そこでまず，これら3個のカラーを $SU(3)$ で変換したときに系のハミルトニアンも厳密に不変であると仮定した．そうしてこの変換を，これまでの近似的に成り立つ $SU(3)$ と区別し，**カラー $\boldsymbol{SU(3)}$** と呼んだ．現在は $SU_C(3)$ と書かれる．しかしこれだけでは，カラーの区別ができないと言うだけで，このような自由度の出現は抑えられていない．そこで，さらに観測されるいかなる状態も $SU_C(3)$ の1次元表現に限られると仮定された．すなわちクォークの閉じこめは，カラーの閉じこめに他ならない．しかしこれを実現するのは，対称性のようなカイネマティックスの議論によるのではなく，系のダイナミックス，つまりクォーク間あるいはクォーク・反クォーク間に働く特殊なダイナミックスを必要とする．そうしてその理論は現在QCD（quantum chromodynamics; 量子色力学）と呼ばれる場の量子論として定式化された．これの与える相互作用は．$SU_C(3)$ をゲージ化して導かれるゲージボソン（グルオンと呼ばれる）を媒介として行われる．カラーの閉じこめの仮定はこれによって，初めて支持されたのである．

## 4. おわりに

これまで見てきたように，クォークには不思議なことに3という数がつきまとってきた．しかしその内容は一様ではなく，時間とともに中身を変えて関与している．最初は坂田模型における3個の基本粒子 $p, n, \Lambda$ とそこにおける数学 $U(3)$ の登場である，しかし実験との対応でこれが $SU(3)$ に改変され，坂田模型の基本粒子に代わって3個のクォーク $u, d, s$ がこの群の基本表現として導入された．すでに述べたようにGell-Mannは当初，クォークのリアリティを認めることに消極的であった．しかし1970年代に入り高エネルギー実験が進むにつれ，皮肉にもハドロン内にクォークの存在することは疑いのない事実となっていった．そればかりではない．新たに $c, b, t$ と名付けられるクォークが見つかったのである．それぞれの電荷と質量は（2/3，約1.3 GeV）[*14]，（−1/3，約4.5 GeV），（2/3，約17 GeV）であって，いずれも $N_B = 1/3$ で3種のカラーをもつと見なされ，それぞれには電磁および強相互作用で保存する特有の量子数が存在する．もはやeightfold wayにおける3を，基本粒子の数と見なすことは許されず，これに本質的意味をもたせるのは無理である．たまたま質量の小さいクォークが3種という偶然的事情の反映であった．ところが，$SU(6)$ という奇妙な模型[*15]を契機としてカラーの概念が導入され，3はその種類の数として中身を変えて現れてきた．そうしてこれに伴う $SU_C(3)$ は厳密な対称性であり，それは実験結果とも整合している．これまでと異なり，この3は非常に基本的な意味を担っている．ただ，なぜカラーの数は3なのか．また厳密な対称性を成立せしめているものは一体何なのか．答は，ことによると物質存在の根幹と深く関わっているのかも知れないという気がする．

*14） 1 GeV は 1 MeV の 1000 倍．

*15） この対称性は相対論と両立しない．

### 参考文献


1) 本稿では素粒子の多面的な性質を紹介して話を進める余裕はない．素粒子論の展開と全貌の概観については，例えば：南部陽一郎，『クォーク 第2版』講談社BLUE BACKS (1998) などを参照されたい．
2) 素粒子のより詳しいデータは，http://pdg.lbl.gov/ から得ることができる．
3) 対称性理論の初期の展開に関しては詳しくは：大貫義郎；対称性理論事始，「素粒子論研究」**82**, 503–547 (1991), およびそこでの引用文献を参照して頂きたい．ただしこれらの多くは読者が専門家であることを前提として書かれている．一般向けのものとしては例えば：大貫義郎；対称性の発見—坂田模型からクォークへ—，科学朝日編集部編『物理学の20世紀』朝日選書619（第9章），189–208（2月1999）．


（おおぬき・よしお，名古屋大学名誉教授）

特集／数の魅力

# 「『数』の発展史」と「新しい数学」

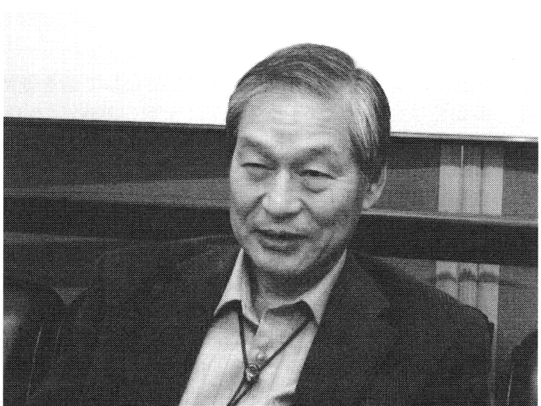
足立　恒雄（聞き手：編集部）

## 1.「数」との出会いと興味の広がり

**——先生のご著書には「数」をテーマにしたものが多いようですが，どういったところに不思議さ，あるいは魅力を感じたのでしょうか．**

私は「数」に関して様々な興味・関心を持っていますが，個々の「数」や素数やその分布などに対して，というわけではなく，「数」そのものに関する思想が気になっています．

「数」の発生というものがどのようなものであり，かけ算やわり算のような演算がどのようにして生まれてきたのかということにまず関心があり，次いでギリシャ人がなぜあれほど「数」にこだわるのかということに興味を持っています．



足立恒雄氏．

ギリシャ哲学というのはものすごく「数」にこだわっている学問だと思います．「1とは何か」とか「2とは何か」など，これほど「数」のことばかり議論している哲学は他にはありません．なぜここまで「数」に囚われたのだろうか，と考えたことが私の興味の原点になっています．

整数論という学問は，ギリシャ人の整数に対するこだわりから生まれたのであって，他の文明にはそのような学問が体系として発達する背景はありません．例えば，日本では，「七五三」，「七回忌」，「十三回忌」，「五箇条の御誓文」，「十七条憲法」など，素数が使われる傾向が強いということは有名な事実です．何か素数に対するこだわりがあることはわかりますが，それが意識化して学問になることはありませんでした．

現代の数学は，自然数を作り，有理数を作り，実数を作り，複素数を作り，数体系が完成するのですが，数体系というのは全数学のもとになっていますよね．結局，幾何学や解析学も実数というものが前提としてなかったら，学問になりませんよね．そういった意味で，全数学の大本になっている数体系とその歴史にも興味・関心を持つようになりました．

それから，私自身は数学者として，整数論を研究しましたが，後に，数学基礎論にも関心を持ち

ました．高木貞治先生も整数論を40歳くらいまで研究して，その後，数体系に関心を持たれました．そういう数学者は他にもたくさんいますが，歳をとると数学の哲学的な方面に関心を深めていくというのも一つの類型ではないでしょうか．私は，最終的には，数学という学問がどの程度，人類に，さらに，生物に，そして地球という地域に限定されているのか，ということに関心があります．そういうつもりがあって『数—体系と歴史』[3]その他[1]を書きました．

ギリシャ時代の「数」というのは面白いことに自然数だけなんですよね．それ以外の「数」は，「量」と呼ばれていました．“温度”とか“角度”といった量は連続量ですよね．これらは「数」とは認められていませんでした．当然，負の数など存在しようもなかったわけです．

ですから，その当時の“負の数などはないことを前提にして作られている数体系”と現代数学のそれとは，完全に別物なのではないでしょうか．

これには“文化の相対性”と言われる概念——二つの時代のそれぞれの文化・文明は孤立し，お互いに独立なんだという考え方——が関係しているのではないかと考えています．このことを数学に対して，当てはめてみると，数学が発展する一方だとは言えない，ということになります．よくある考え方，つまり数学は諸文明を超え，果ては人類まで超えた存在だと考えるのはちょっと単純すぎますよね．

この辺りのことは，若い頃に「数学は美しい」などと言って研究にいそしんだのとは，少し考え方が違ってきました．

アリストテレスは「ものの重さに比例して，ものの落ちる速さが決まる」とは言っていません．もともと，ギリシャ人はそのようなことに対して何の興味も持っていなくて，宇宙論——例えば有限なのか，無限なのか，とか，どのくらい整然とした形をしていて，調和がとれたものなのか——に興味を持っていたのです．動いているものの描写など，そういった動力学的な興味は西洋数学・科学の特徴です．このように文明に応じて関心の対象が異なるものです．

今の数学は完成形であるはずがなく，西洋数学の次の数学，例えばフラクタル，カオスなどを本格的に扱う数体系や推論方法などの未来の動向も気になるところです．

シュペングラーの『西洋の没落』[1]には「文化に応じて，文明に応じて「数」はあるのだ．だから「数」そのものなんてないのだ」と書いてあるのですが，自然数がギリシャ数学を，微積分学を支える実数体系が現代までに至る西洋数学を特徴付けているのだとすると，これからの「数」は何だろうか，考えるととても興味深いです．

**——それは，どのようなものになると思われますか．**

恐らく，フラクタルやカオスのような概念は，物事が微小にして単純な構成要素からなっている，ということを否定するところに特徴がありますが，こうした概念を表すのにもっと都合がよい「数」が出てくるんじゃないでしょうか．連続性よりは離散性のほうが重要度を増すでしょうね．

先ほども言いましたが，ギリシャ数学は動かないもの，整然としたもの，調和のとれたものにとりわけ関心を持っていました．もともと秩序，調和，美を表す“コスモス”とその対になる混沌を表す“カオス”という言葉を作ったのはピュタゴラス派です．

これに対して西洋文明は，整然と調和的永久的に運動するものに関心を持ったと言えます．ギリシャの離散的数論哲学の呪縛を受けながらも，それを超克して微積分学とその基礎をなす実数論を創り上げました．そして，可逆性の範囲の中で時間という概念を捉え，相対性理論まで到達したわけです．整然としているものの極致が相対性理論なのではないのでしょうか．

このように整然とした宇宙（コスモス）が膨張するなどということはアインシュタインは受け入れられなかったのではないかと思います．

インドの詩人のタゴールは「それは人間が見た真理なのだ．真理というのはすべて人間に依存しているのだ」と言っていますが，アインシュタインは受け入れません．神——ここで言う神とはキリスト教的な人格神ではありませんが——の支配している調和のとれたあまりにも神秘的で美しい宇宙がある，宇宙の調和と真理の普遍性を表現するには神としか言いようがない，こう思ったわけです．

でも，その考えは 20 世紀後半からは大きくはずれつつありますよね．実は，カオスやエントロピーの概念，化学反応の非可逆性などが，ものの本性なのだということがわかってきて，基本をそこにおこうという考えが出てくるのだと思います．

そういう流れの中では，原子的な点を構成要素とするこれまでの数体系は今のままでよいのだろうかと私は思っていて，これから先出てくるであろう「新しい数学」やその根本をなす数体系に興味を持っています．

## 2.「数」やその発展史に関する本

**——これまでのお話を聞いていると様々な歴史を通じて，「数」や数体系は発展してきたようですが，「数」やその発展史に関して薦めたい本はあるでしょうか．**

そうですね．どんな本を読んだらよいか挙げるのが難しいですが，もちろん，歴史に学ぶという意味で歴史の本[1)]を読むのがよいと思います．

他には非可逆性という観点から，プリゴジンの本[2)]がよいのではないでしょうか．

それから現代の数体系の成り立ちを数学的に厳密に総括する意味で，先に言及した拙著[1,3)]を挙げておきます．

薦めたい本はまだまだありますが，ここでは紹介し切れませんので，各執筆者の先生方が挙げられているものをご覧いただくのがよいと思います．

## 3. 学生や研究者に求めること

**——これからこの分野を学ぶ若い人たちはどういったことを学べばよいでしょうか．**

私が専門としてきた整数論というのは歴史上，ほとんど役に立たなかったのですね．ところが，最近，やっと暗号理論で役に立つようになりました．

その暗号理論に関するということですと，まず数学を，特に解析のような連続の数学だけやっていても整数論のような離散数学に慣れることはできませんので，離散数学を勉強しておく必要があると思います．

昔は微積分や微分方程式など解析学に代表される，連続の数学が必要だったのですが，最近はもっと離散的な数学のほうが役に立っているように思います．離散的な数学の集大成としての整数論も面白いかもしれませんね．

**——計算機の発展なども関係しているのでしょうか．**

とても関係がありますね．最近，話題に上る量子コンピュータがどの程度の能力を持っているのかはわかりませんが，今の問題をすべて解けるわけではないですよね．その中には難しさのレベルみたいなものがありますからね．ですから，量子コンピュータがどのレベルの問題を解けるのかという研究も出てきますよね．（ギリシャ的）離散から（ヨーロッパ的）連続，そして（未来的）超離散へという流れがコンピュータの発達と密接に関連しているでしょうね．

それから，人間の脳との関係で，推論方法の変化というものも考えられます．

推論そのものは 20 世紀まではギリシャ以来の演繹推論——いわゆる証明ですが——に頼ってきましたが，新しい証明とは何なのか，何かを確認する手立てとしての方法に新しい動向が見えつつあります．それにはやはりコンピュータの進展が関係していますね．

**——これから研究者を目指す学生さんや若い研究**

**者の方へメッセージをお願いします.**

そうですね. これから数学研究者になる人に対して望むことは, 専門家としての知識だけがあれば, それ以外は何もできなくてよいというような考え方は避けたほうがよい, ということでしょうか.

やはり, 工学や社会現象に対して, 数学者がどんどん意見を言っていく必要があると思います. また, そうした社会にしていくべきだと思います. 象牙の塔に閉じこもらず自分から動かなければならないのです.

それには, もっと自分のしたことを宣伝していく必要もあると思います. 数学至上主義みたいな思想は百害あって一利もないです. 人間あっての社会であり, 社会あっての数学です. 数学の人にはそのようなことに目覚めてほしいですね.

10進法の四則計算を教えるのが数学者の仕事であった時代があるように, 数学教師がいらなくなるわけではないですが, 既存の理論を再生産するようなことを繰り返していては, 古典的な意味での数学は何か袋小路に追い込まれたようになって生き残れないのではないかということを危惧しています.

このままでは, 先ほどお話した「新しい数学」を創造する方向に行くどころか, むしろ工学や物理の人たちから新しい動向が現れて, もともとの数学者は下のほうの木の枝のように取り残されてしまうのではないでしょうか.

世の中の動きに流されることだけがよいわけではありませんが, 江戸時代の数学のように趣味や芸術としての数学にとどまることは長い目でみるとよくないことだと思います.『数理科学』という雑誌が数学だけにとどまっていないということもとても気に入っています. そういった意味で世の中の流れを少しでも考えていかないと, それこそ「忘れられた科学」になってしまうのではないかと強く思います.

単に論文を書いていればよいというだけでなく, 私の趣味である書道では "書は人なり" と言いますが, "全人格の表現" といったような, 何かこの人でなければ表れない人格の表出というものが数学にもなければ, 「子供の学問」になってしまってつまらないですね.

**——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり, 誠にありがとうございました.**

(2007年12月,
早稲田大学大久保キャンパス研究室にて)

**参考文献**

1) 相対主義的数学史観としては, シュペングラー著, 村松正俊訳『西洋の没落』(五月書房) の第一章が古典. 他に筆者の一般書三部作 (『無限の果てに何があるか』光文社知恵の森文庫;『$\sqrt{2}$ の不思議』ちくま学芸文庫;『無限のパラドクス』講談社ブルーバックス).
2) プリゴジンの本については, 妹尾学訳『化学熱力学 1, 2』(R. デフェイとの共著) みすず書房;『構造・安定性・ゆらぎ:その熱力学的理論』(P. グランスドルフとの共著) みすず書房;『散逸構造:自己秩序形成の物理学的基礎』(G. ニコリスとの共著) 岩波書店;『混沌からの秩序』(イザベル・スタンジェールとの共著) みすず書房; 小出昭一郎, 安孫子誠也訳『存在から発展へ:物理科学における時間と多様性』みすず書房 (1984);『複雑性の探究』(G. ニコリスとの共著) みすず書房; 安孫子誠也, 谷口佳津宏訳『確実性の終焉:時間と量子論, 二つのパラドクスの解決』みすず書房 (1997); 妹尾学訳『現代熱力学:熱機関から散逸構造へ』(D. コンデプディとの共著) 朝倉書店 (2001).
3) 足立恒雄著『数—体系と歴史』朝倉書店 (2002).

(あだち・のりお, 早稲田大学理工学術院)

# オイラー探検

## 無限大の滝と12連峰

黒川信重著，**A5**判，本体2300円，192頁，シュプリンガー・ジャパン




あまり数学的予備知識もなく勉強を始めた評者がオイラーという人物を意識したのは，多面体のオイラー標数という不変量であった．三角関数に関するオイラーの公式，オイラーの $\varphi$（トーティエント）関数などに出会っても，その数学者オイラー自体にあまり印象を受けなかった（どちらも，小文字が使われている）．印象的であったのは，オイラー標数を表す $X$ または $\chi$ という文字であり，それがオイラーの象徴と思われた．それは，どこか他の宇宙からやってきた謎の結社の総統を連想させた．黒眼鏡をかけ，顔は鬚に覆われ，頭巾とマントを着ているオイラーは，「数学の指導原理はすべてオイラー標数にあり，その下に従って動くにすぎない」と吠えているようだった．実際，リーマン・ロッホの定理やアチヤ・シンガーの指数定理も，みなその一つの現象に過ぎないと感じられる．

このような先入観でこの本を読むと，彼の数に対する感覚に驚かされる．

全体が大きく2部に分かれている．第1部は「滝」を探検するそうで，ゼータ関数

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \cdots$$

という天からの滝に打たれるまでの，大瀑布のしぶきを浴びる快感を味わう．

素数が無限個存在するというのは，ギリシャ数学の偉大な成果であるが，4で割って1余る素数も3余る素数もそれぞれ無限個あるかという問題はまた別問題で，オイラーの仕事からこれらが肯定的であることが示される．

自然数の逆数の和

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

が無限大になるという14世紀の結果の証明の後，素数の逆数の和

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots$$

が無限大になるという，オイラーの大発見の証明が与えられる．その際，ゼータ関数が導入される．

さらに条件つき素数の逆数の和が無限大になることの証明で，2個のゼータ

$$\zeta_2(s) = \sum_{n:\text{奇数}} n^{-s}, \quad L(s) = \sum_{n:\text{奇数}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^{-s}$$

も導入される．

さらに不思議な定理

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots = \frac{1}{4}$$

の平均極限からの説明により，驚異の結果

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

が示される．正の数の無限和が負になるというこの結果を貴方は肯じられますか？

第2部はオイラーの「峰」を探検するそうで，オイラー全集からそのままの記号で12組の等式を展示し，その現代的な書き方や解説を示している．オイラーの公式

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos.v + \sqrt{-1}\cdot\sin.v$$

から始まり，例えば

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \text{etc.}}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n}\cos.\frac{n\pi}{2}$$

などの魅力的なたくさんの式が並んでいる．

実際にこのような計算を自ら考え始めると，この非現実とも思われる世界の予定調和に戦慄的興奮感を味わうことができるのだろう．

「素数の逆数の和は無限大」というのも，実にゆっくりとこの級数は大きくなるので，1秒間に1個ずつ足していっても，宇宙が滅亡するときも，たいして大きい数ではない（数学的に無意味な表現）ようである．このような無限大というのは，本当に意味があるのだろうか．有限の生の下の有限時間の思考にとって無限の意味はどこにあるのだろう．

士官の問題に関するオイラーの誤った予想や，切手などに見られるあまり高貴とは感じられない肖像に，劣等生はより親近感を感じてしまう．

佐藤　肇（名古屋大学名誉教授）

# 「数理科学」は語る

## 30年前から現代へのメッセージ

一 松　信

1978年8月号




30年前の懐古などといい，さらに私が同号の巻頭に書いた有限数学の拙稿を読み直し，大筋において今も同感だなどというと，数学の発展が停滞しているように受取る方があるかもしれません．天文学の分野では「あなたの知識は何年の天文学か？」という広告が載る程です．

もちろんその間に多大の進展がありました．例えば旧稿で未解決問題の例にフェルマーの大定理を引用したのは昔語りです．後半のP=NP? 問題の困難さは当時の予想を上廻り，今では百万ドルの懸賞金つきの難問に指定されています．コンピュータによる数値計算に関する当時のぼやきは不勉強の現れで，今では無制限倍長計算や精度保証つき計算のシステムが完備し，それらに支援された数学の定理証明もいくつかなされています．

有限数学ないし離散数学という語もだいぶ認知されて，学校数学に取り入れようという運動もあります．私も半公式的に文部科学省から意見を問われたことがありました．先生方に熟知させ次の回の改訂で削除されることがないようにという希望を申し述べておきました．

とはいうものの，やはりかつての「数学の栄光時代(？)」はもはや失われた世界との印象がぬぐえません．理数離れは日本だけでなく「先進国共通の課題」だと聞いても，やはり悲しい気持ちです．

ただし数学人にとって希望のもてるデータがあります．最近某大手塾が大学生対象に「高校時代にもっと勉強しておけばよかったと思う科目」のアンケートをとった所，学部学科を問わず数学が半数近く，次いで英語が1/4という結果です．文科系（特に経済学部）では「入試になかったので勉強しなかった」，理工系では「数学IIIやCが入試対象外だったがこれ程重要とは思わなかった」というパターンが大部分でした．さらにどういう部分が特に重要かというデータもあるので，これからの指針になりそうです．

本誌からは外れますが，数学検定の採点のお手伝いをすると，学力低下というよりも困った傾向が目について気になります．それは自分の誤りに気づかずこの問題はおかしいと文句を述べる方です．科学を志す者はもっと謙虚に徹して自分を疑う心掛けが必要です．理数離れの原因の一つに人間が傲慢になって相手を攻撃する風潮が影響しているのでなければ幸いです．

数学教育の話になりましたが，本誌に対してはこれからも現在の数学がどういう分野でどういう形で使われているか，どういう課題があるかというような展望を積極的に伝えて下さることを希望します．

（ひとつまつ・しん，京都大学名誉教授）

# 視覚の科学と数学

## ウェーブレットで探る錯視の世界

## 第1回

# 視覚の数理モデルとウェーブレット

新井　仁之

### 1.1 はじめに ——視覚，数理モデル，そして錯視

人はどのような仕組みでものを見ているのだろうか？ この問題は古くから興味をもたれ研究されてきた．例えば古代ギリシャ時代には，プラトンなど哲学者たちが視覚に関する議論を行っていた．また近世になってからは，デカルトによる解剖学に立脚した理論やバークリーの視覚理論などが生まれた．視覚は生活上極めて重要な感覚であるため，視覚のメカニズムの解明は時代時代における急務であり，その研究は脈々と続けられてきたのである．特に 20 世紀になってからは，心理物理学，神経科学，脳科学の進歩に伴って，視覚の科学的な研究が急速に進んだ．しかし，このように研究が続けられてきたにも関わらず，解明されていないことが今もなお数多く残されている．

**視覚は 21 世紀の科学における最も重要な研究課題の一つ**

であると言えよう．

筆者はこの課題を先端的な数学と計算機実験を用いる新しい方法を考え研究している．このように書くと読者の中には，視覚の研究に数学が役立つのかと疑問を抱く方もおられるかもしれない．そこでまず視覚の研究と数学がどのように結びつくのか，私見を述べておくことにしたい．

近年の実験技術の進歩には目を見張るものがある．ニューロンの活動を記録する方法，PET，fMRI など脳内の代謝活動を見る方法などが開発された．これにより，視覚のどういった機能が脳のどの領野と関連するのかということが詳しくわかってきた．しかしその領野でどのようなアルゴリズムにより視覚情報が処理されているのか，ということについてはわかっていないことが多い．私自身はこのような部分は数学的な方法を用いれば，その解明が進むのではないかと考えている．しかし，残念なことにそのような数学的研究は不十分であると言わざるを得ない．この部分はどのような考え方で研究を進めればよいのだろうか？ かつてデカルトは次のように述べている．

「事物の真理を探求するには方法（Methodus）が必要である．」[*1]

我々の方法は次のようなものである．まず脳内の視覚系の仕組みをヒントにして，視覚の数理モデルを設計していく．ただし視覚の数理モデルはあくまでも現実の視覚系の一部分を単純化し模倣

*1） デカルト『精神指導の規則』（野田又夫訳，岩波文庫）より．

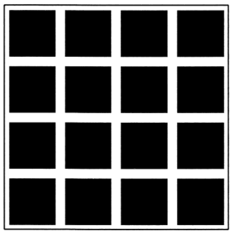


図 1.1　ヘルマン格子．白い路の交差点に実在しない薄暗いスポットが見える．

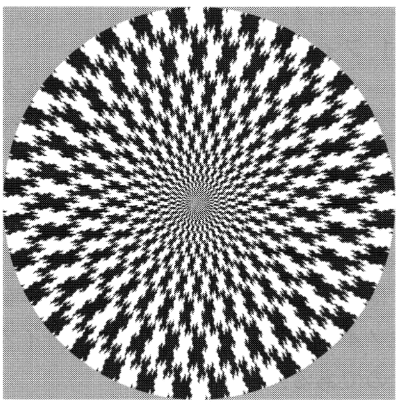


図 1.2　新井仁之・新井しのぶが 2007 年に発表したフラクタル島を用いた渦巻き錯視．北岡明佳氏によりフラクタル螺旋錯視と命名された．同心円状に並べたフラクタル島が渦巻いて見える．

したものであり，実際の視覚系とは異なった存在である．現実の視覚系とその数理的な模倣物，この 2 つの対象を結びつけるにはどのようにすればよいか？ 筆者は，それを結びつけるものに錯視，すなわち視覚における錯覚があると考えている．議論を続ける前に錯視とはどのようなものか，その代表例を紹介しておこう．

図 1.1 をご覧いただきたい．これは 1870 年に L. Hermann により見出されたヘルマン格子錯視である．図の中心を見ていると，その周囲の白い交差点の部分に薄暗いスポットが見えるであろう．しかし実際にはこのような薄暗いスポットは印刷されていない．このスポットは私たちの視覚系が生み出した錯覚である．次にもう一つ別のタイプの錯視図形（図 1.2）を紹介しておく．図 1.2 は新井仁之，新井しのぶが 2007 年に作った渦巻き錯視の一種である．この図では，フラクタル島が

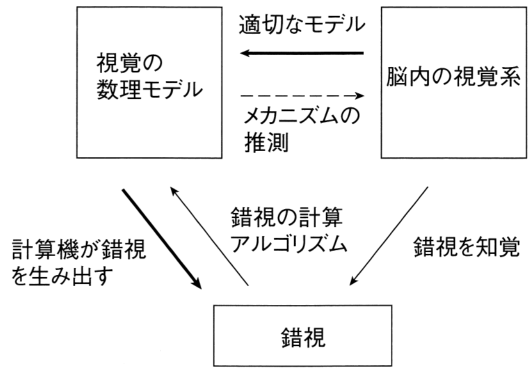



図 1.3　視覚の数理モデルと錯視．

実際は同心円状に配置されているのだが，それが渦巻いている螺旋のように見える．この他にも錯視には様々なものがある．そのいくつかは本連載でも取り上げていく予定である．

さてこのように視覚系はしばしば錯視を生み出す．いま我々が何か視覚の数理モデルを設計したとしよう．もしこれが視覚のモデルとして適切なものであれば，それを実装した計算機は，人の視覚系と同様に錯視を生み出すはずである (図 1.3)．つまり錯視は視覚の数理モデルの試金石となっているのである．しかし錯視はさらに重要な役割も果たし得ると考えている．それは計算機上で錯視が発生するようなアルゴリズムを見出せれば，それをもとにして実際の視覚系のメカニズムを推測することも可能になるのである．それは錯視発生のメカニズムの解明にもつながるはずである．またこのようにして視覚の数理モデルを作ることにより，実験では確かめることが難しいような考察を行うこともできる．これについては本連載の後半で述べる予定である．いずれにせよ**錯視は視覚の数学的研究において鍵となる重要な現象である**と言える．

## 1.2 視覚の数理モデルとウェーブレット，そしてフレームレット

さて視覚の数理モデルを我々は次のような考え方で作った．視覚の情報処理には大別して

1. 局所的な情報処理．
2. 大域的な情報処理．

がある．局所的な情報処理とは，ニューロンが近傍にあるニューロンと連合して形成する受容野によって行われる．詳しくは次回述べるが，例えば網膜，外側膝状体，視覚皮質の V1 野には局所的な情報処理を行う受容野が形成されている．なお高次の視覚領野では非常に大きな受容野があると考えられている．大域的な情報処理には，例えばニューロンの水平結合により行われる統合的な情報処理がある．我々は局所的な情報処理を数理モデル化するのにウェーブレット，あるいはウェーブレットをより進化させたようなフレームレットを用いる．大域的な情報処理については，さらに工夫をしなければならない．これについては回を改めて述べていきたい．またウェーブレット，フレームレットも既存のものでは視覚研究には不十分であり，必要に応じて新しいものを考案していかなければならない．今回は，まずウェーブレット，フレームレットを含むような一般的な枠組みであるウェーブレット・フレームを簡単に説明し，特にウェーブレットの錯視の研究への応用を示したいと思う．我々が構成した視覚研究に適した新しいウェーブレット・フレーム，フレームレット（新井・新井[2,3]）については後の回で述べることにしたい．

## 1.3 ウェーブレット・フレームとは何か

ウェーブレットは 1980 年代に現れた新しい数学的道具である．元々はフランスの石油会社に勤務していた技術者ジャン・モルレが，定型ウェーブレットというものを見出したことに始まる．モルレは物理学者のグロスマンの協力を得て，『ハーディ関数の 2 乗可積分定型ウェーブレットへの分解』という論文を完成させ，これが 1984 年に出版された．これ以降ウェーブレットは他に類を見ないほど急速に発展した．フランス，アメリカを初めとする多くの研究者により，連続ウェーブレット，ウェーブレット基底，ウェーブレット・パケット，定常ウェーブレット（定型ウェーブレットとは異なる）などが考案された．そしてそれらは様々な分野で使われ，例えばアメリカ連邦捜査局による指紋データの圧縮，新しい画像圧縮方式である JPEG2000 など，その実用化でも著しい成果を挙げてきた．2000 年前後からさらにウェーブレット・フレーム，フレームレットという枠組みも研究され始めた．

ウェーブレット・フレームの説明でキーワードとなるのはフィルタである．まずフィルタの説明からしておこう．

### 1.3.1 フィルタ

ウェーブレット・フレームとはフィルタのある集まりである．フィルタとは入力信号に対して，その信号の特定の性質を抽出し，出力するものである．例えば信号から低周波部分あるいは高周波部分を抜き出す機能をもつフィルタなどがある．図 1.4 は低周波部分を抜き出すフィルタを使って高周波ノイズで汚染された信号からノイズを分離したものである．

ウェーブレット・フレームが関係するのはこういったフィルタのうち線形フィルタである．本稿では主に画像を扱うので，次のような設定で説明を進める．自然数 $N$ に対して $\boldsymbol{Z}_N=\{0,1,\cdots,N-1\}$ とし，$N_1,N_2$ を自然数とする．また $\boldsymbol{Z}$ を整数全体のなす集合とし，$\boldsymbol{Z}^2=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ とおく．フィルタ $F$ とは画素数 $N_1\times N_2$ の画像信号 $x=(x\,[n_1,n_2])_{(n_1,n_2)\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\boldsymbol{Z}_{N_2}}$ に対して，画像信号 $y=(y\,[n_1,n_2])_{(n_1,n_2)\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\boldsymbol{Z}_{N_2}}$ を出力する写像のことである．特に $F$ が線形写像であるとき，$F$ は線形フィルタであると言う．$\delta=(\delta[n_1,n_2])_{(n_1,n_2)\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\boldsymbol{Z}_{N_2}}$ を単位インパル

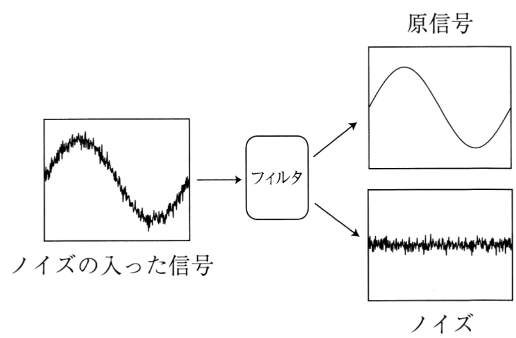



図 1.4　ノイズを分離するフィルタ．

スとする．すなわち $\delta[0,0]=1$, $\delta[n_1,n_2]=0$ $((n_1,n_2)\neq(0,0))$ とする．このとき $f=F(\delta)$ を $F$ の単位インパルス応答と言う．特に単位インパルス応答とのたたみこみ

$$F(x)=x*f=\sum_{k_1,k_2=0}^{N-1}x[n_1-k_1,n_2-k_2]f[k_1,k_2]$$

で表されるフィルタが有用である．ただしここで $x$ は $\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\boldsymbol{Z}_{N_2}$ 上で定義された信号であるが，これを $\boldsymbol{Z}^2$ 全体に周期拡張しておく*2)．

図1.4の場合は，$f_1$ として低周波部分を抜き出すフィルタを選び，$x*f_1$ が図1.4の右上，$x*(\delta-f_1)$ が図1.4の右下に示してある．

### 1.3.2 ウェーブレット・フレーム

さて今後使っていきたいウェーブレット・フレームは次のようなフィルタの集まりである．

**I.** 比較的低域の部分とそうでない部分を分離できるフィルタがある．
**II.** 方位選択性をもつフィルタがある．
**III.** 多重解像度分解ができる*3)．
**IV.** 完全再構成である．
**V.** 様々な形状のフィルタを必要に応じて構成することが可能である．

このように書いてもウェーブレット・フレームは初めてという方にはピンとこないかもしれない．そこで「百聞は一見に如かず」なので双直交ウェーブレットと定常法（最大重複法とも言う）*4)を使ったウェーブレット・フレーム（定常双直交ウェーブレット）により，I〜IV がどのようなものであるのか，具体的な計算例を示す．

入力画像 $x$ として図1.5の一番上の家の絵を考える．まずウェーブレットを構成するフィルタを組み合わせて用いることにより，$x$ をその大まかな傾向を示す近似部分 $P_a^{(1)}(x)$ と細かい部分に分解する．細かい部分はさらに，水平部分 $P_h^{(1)}(x)$，垂直部分 $P_v^{(1)}(x)$，対角部分 $P_d^{(1)}(x)$ に分解される．図1.5の一番上が原画像 $x$ である．上から2行目に左から順に $P_a^{(1)}(x)$, $P_h^{(1)}(x)$, $P_v^{(1)}(x)$, $P_d^{(1)}(x)$ を載せてある．この分解をレベル1の多重解像度分解と言う．近似部分とそれ以外の部分で I が実行され，水平部分，垂直部分，対角部分で II が実行されていることがわかるであろう．IV の完全再構成とは

$$x=P_a^{(1)}(x)+P_h^{(1)}(x)+P_v^{(1)}(x)+P_d^{(1)}(x)$$

となることである．次にレベル1の多重解像度分解を行ったものと同じフィルタでスケールを変えたものを用いて，今度はレベル1の近似部分 $P_a^{(1)}(x)$ をさらに近似部分，水平部分，垂直部分，対角部分 $P_a^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr)$, $P_h^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr)$, $P_v^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr)$, $P_d^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr)$ に分解する．この結果が図1.5の上から3番目の行に並んでいる図である．これをレベル2の多重解像度分解と言う．ここでも完全

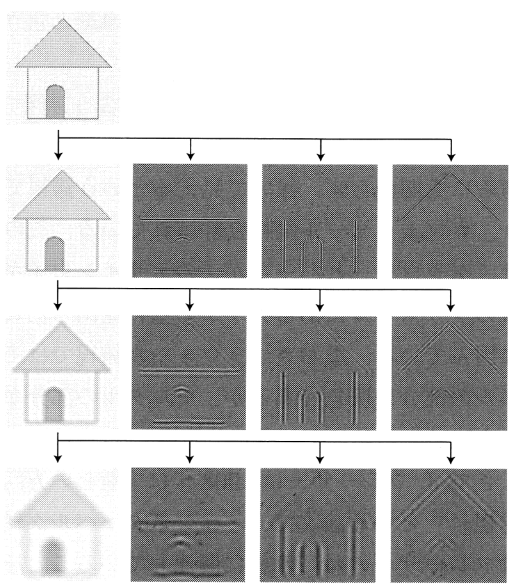



図1.5　定常双直交ウェーブレットによる多重解像度分解．

*2) 拡張の方法はいくつかある．例えば周期的に拡張する周期拡張，境界のところで対称に拡張する対称拡張などがある．

*3) ウェーブレット以外の場合は，一般化多重解像度分解と言ったほうが正確である．

*4) 本節では双直交ウェーブレット（Cohen, Daubechies, Feauveau, *Comm. Pure and Appl.* 1992）に定常法（Nason, Silverman, *Lect. Notes Statistics*, 1996）を組み合わせたものを使う．定常法は通常のウェーブレット・フィルタ・バンクのようにデータのダウンサンプリング，アップサンプリングを行わない．その代わりフィルタに操作を加える．定常法を使うとシフト不変性が出てくる．

再構成性

$$P_a^{(1)}(x) = P_a^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr) + P_h^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr) + P_v^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr) + P_d^{(2)}\bigl(P_a^{(1)}(x)\bigr)$$

が成り立っている．以下同様にレベル 3，レベル 4，$\cdots$ と多重解像度分解を続けることができる．そして図 1.5 のように原画像を分解していくことを定常法による多重解像度分解と言う．

V については，もう少し視覚の話を進めてから，我々の考案した新しいウェーブレット・フレームの解説と共に述べることにしたい．

今回は定常双直交ウェーブレットの錯視研究への応用を述べる．

## 1.4 ウェーブレットと傾き錯視

この節では，新井・新井[1) ]による錯視の数学的な研究結果の一部を述べる．我々は定常双直交ウェーブレットを用いると，傾き錯視の錯視の要因をきれいに抽出できることを発見した．傾きの錯視とは，平行に配置されている線が平行に見えないという錯視である．例えば図 1.6 はフレーザー錯視と呼ばれているもので，白と黒でデザインされた紐が平行に並べてあるが（これをねじれ紐と言う），それらは平行ではなく傾いて見える．

もう一つ傾きの錯視を紹介しておこう．図 1.7 である．これは，灰色のモルタルが実際は平行であるにも関わらず，傾いて見えるという錯視であり，カフェウォール錯視と呼ばれている．この名は，グレゴリーとハードがこのデザインをイギリスのブリストルにあるカフェの壁に見出したことに因んでいる．なおカフェウォール錯視ではモルタルの部分が灰色であるが，モルタルの部分が黒いものはミュンスターベルグ錯視と呼ばれている．

さて J. フレーザーは 1908 年に『新しい方向の錯視』[*5)] という論文で，ミュンスターベルグ錯視はフレーザーのねじれ紐に関連していることを唱えた．そしてモーガンとモールデン[*6)] は 1986 年に，帯域通過フィルタを用いて，カフェウォール錯視図形からねじれ紐の一種（モーガンのねじれ紐）を抽出することに成功した．ここでは定常双直交ウェーブレットを用いて，カフェウォール錯視の分析をしてみる．カフェウォール錯視を多重解像度分解し，レベル 2, 3, 4 の水平部分を見てみよう．図 1.8 に左から，レベル 2, 3, 4 の水平部分が提示してある．いずれにもねじれ紐を見出すことができる．しかし

> これが本当にカフェウォール錯視の要因になっているのだろうか？

ウェーブレットの完全再構成性を利用してこのことが証明できる．図 1.9 の左がこれらの水平部分を足し合わせたものを表した画像である．そして図 1.9 の中央は，原画像からねじれ紐の含まれているレベル 2, 3, 4 の水平部分を抜き取ったものの画像である．このようにすると確かに傾きの錯

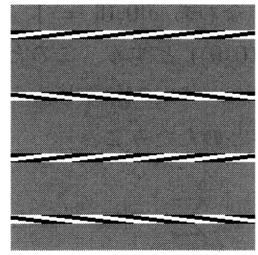


図 1.6　フレーザー錯視.

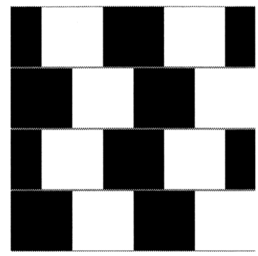


図 1.7　カフェウォール錯視．平行なモルタル線が平行ではないように見える.

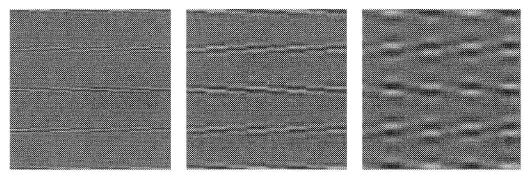


図 1.8　カフェウォール錯視.

*5)　*British J. of Psycho.* **2** (1908), 307–320.
*6)　*Vision Res.* **26** (1986), 1793–1800.

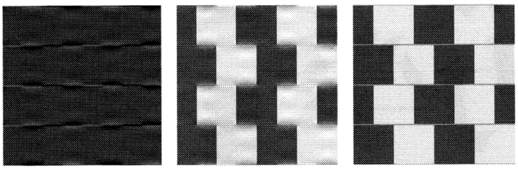


図 1.9　カフェウォール錯視図形から定常双直交ウェーブレットを利用して錯視の要因を抜き取る．右図は原画像．中央の図形の錯視量はほとんどない．

視がほとんど知覚されなくなる．このことは，ねじれ紐が認められるレベル 2，3，4 の水平部分にカフェウォール錯視発生の要因があることを証明している．

次に同じ方法で他の傾き錯視の解析も行ってみる．図 1.10 は北岡明佳氏が創作した市松模様錯視*7) である．これは正方形からなる図形であるが，垂直の線と水平の線が傾いて見えるというものである．これを定常双直交ウェーブレットで分解してみる．市松模様錯視に対してもレベル 2, 3, 4 の水平部分にはねじれ紐状のものが見出せる (図 1.11)．そこで水平部分のうちねじれ紐が認められるレベル 2, 3, 4 の部分を原画像から抜き取ってみる．それが図 1.12 の中央の図である．水平線の傾きはほとんど抜き取れていることがわかるであろう．ただし垂直部分については何も操作していないので垂直線は傾いて見える．このことから市松模様錯視もねじれ紐を含むレベルの部分が錯視の要因をなしていることがわかる．この他にもいろいろな傾き錯視がある．例えば縁飾りつきフレーザー錯視，水路の錯視，縁飾りエッジの錯視，Y ジャンクションの錯視（後半 3 つは北岡明佳氏により考案された錯視図形）などは，定常双直交ウェーブレットにより多重解像度分解すると，ねじれ紐状のものが含まれ，それを抜くと錯視が知覚されなくなることが示せる (新井・新井[1])．以上のことから，ここにあげたいくつかの傾きの錯視発生の要因は，共通してねじれ紐が認められるレベル 2, 3, 4 の水平部分にあることが特定される．

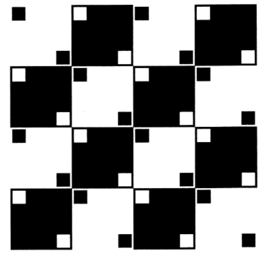


図 1.10　北岡明佳氏による市松模様錯視．本文参照．

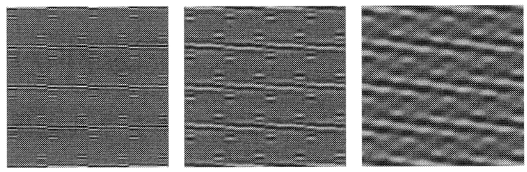


図 1.11　左から市松模様錯視のレベル 2, 3, 4 の水平部分．

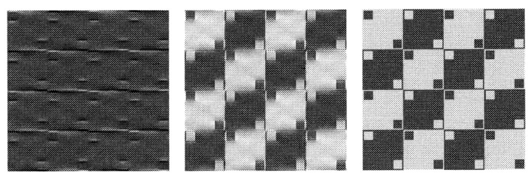


図 1.12　市松模様錯視 (右) から定常ウェーブレットを用いて錯視の要因を抜き取る．

本節で見たように，そして今後この連載を通して提示するいろいろな例により，ウェーブレットあるいは後で述べるフレームレットを使うと今までにない錯視の分析を行うことができることがわかる．そこで問題になることは，

> ウェーブレット，フレームレットは視覚系のどこに存在するのだろうか？

ということである．なお実際の視覚系は非線形情報処理も行っており，この点も絡めて詳しくは次回以降述べることにする．

### 参考文献

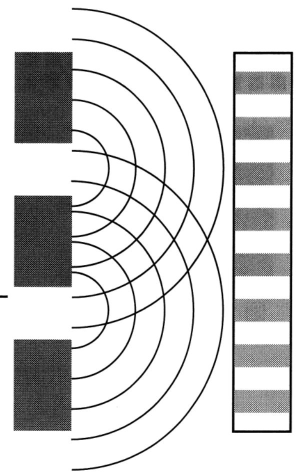

1) 新井仁之，新井しのぶ，*VISION, J. of Vision Soc. Japan*, **17** (2005), 259–265.
2) H. Arai and S. Arai, *Interdisciplinary Information Sci.* **13** (2007), 255–273.
3) H. Arai and S. Arai, preprint, 2008.


（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科／科学技術振興機構さきがけ）

*7)　この錯視の詳細は北岡氏のホームページ http://www.psy.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/checkered.html を参照．

# 目で見て学ぶ量子力学

## 第4回 実験でひもとく量子の不思議



# 干渉性の良い電子の波

### トンネル効果で針先から出る電子

外村　彰

## 4.1 はじめに

肉眼で物を見ることができる限界は，せいぜい 0.1 mm．もっと小さな世界を見るには，虫眼鏡や顕微鏡などが必要になる．A. レーウェンフックは，ガラス玉を磨いて顕微鏡を自作しては，誰も見たこともない微生物を見て楽しんでいたと言う．生涯で 500 台も作ったそうだ．他人の持っていないツールがあると，独壇場である．特に，一番乗りで勝負に勝たなければならない学術研究や開発研究では，独自のツールや技術を持っていると有利である．

我々は 40 年近く“干渉性の良い電子線”を開発し続け，これまで見えなかった物体や現象の観察を可能にしてきた．今回は，我々の“ツール”である“干渉性の良い電子の波”について触れることにする．

明るくて干渉性の良い波は，どうしたら得られるか，電子の波を使うと何が新たに見えるようになるのかなどを紹介したい．まず，どのようにして電子線を発生させるか，から話を始めよう．

## 4.2 電子線を作る

電子は，どんな物質の中にもたくさん存在するので，電子そのものには事欠かない．金属中には電子が自由に動き回っている．かと言って金属の外に自在に取り出す訳にはいかない．壁で取り囲まれているので，外には出て来ない（図 4.1 (a)）．電子を取り出すには，金属を熱するのが手っ取り早い．水を沸騰させて煮えたぎらせ，しぶきを上げて壁を越えるのと似ている（図 4.1 (b)）．金属の表面に電場をかけておくと，電子を次々と外部に引き出せる．これで電子線を得ることができる．

温度をどれだけ上げれば良いかは，壁が水面（フェルミ準位[傍注1]）からどれ

［傍注1］　金属中ではエネルギーの低い準位（レベル）から順に電子がつまっていき，エネルギーの一番高い電子の準位をフェルミ準位と言う．電子を金属内部から外部に引っ張り出すには，フェルミ準位にいる電子にエネルギーを与えて表面ポテンシャルを乗り越えて外部に引き出す必要がある．

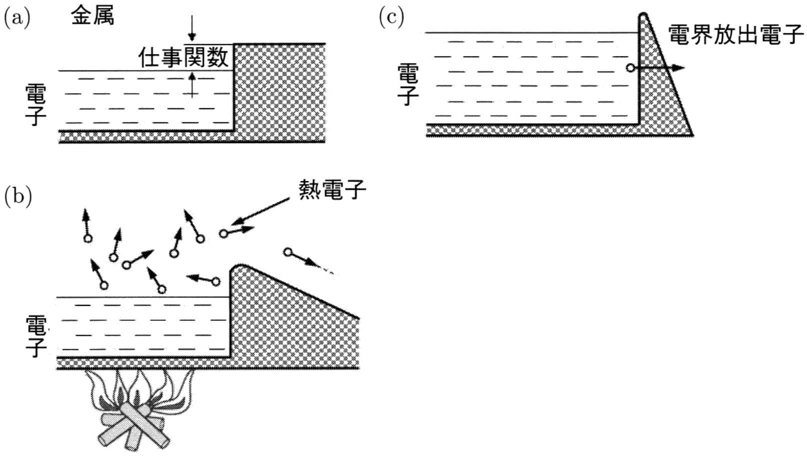



図 4.1　電子放出の原理．(a) 金属中の電子，(b) 熱電子放出，(c) 電界放出．

だけ高いかによる．この高さは仕事関数と呼ばれ，エネルギーにして数 eV ある．仕事関数は eV で表さず，電子の身になって単にボルトで表現することが多い．温度を 10000°C[傍注 2] まで上げたとき，電子はランダムな熱運動をするが，この電子は平均して 1 ボルト分の運動エネルギーを持つ．こんなに高温にすると，原子の熱振動までもが激しくなって金属が融けてしまうので，温度を上げると言ってもせいぜい 3000°C である．これでは，壁を乗り越えることはできそうにないが，すべての電子を外に出してしまう必要はない．3000°C でも，数ボルトの高さの壁を乗り越える電子も出てくる．

［傍注 2］ 温度は通常 0°C などと表し，“摂氏 0 度” と呼ぶが，超伝導などの極低温での話題になると，0°C のことを 273°K と書き，“絶対温度 273 度” あるいは 273 ケルビンと読む．

この方法は，“熱電子放出” と呼ばれている．電子放出のメカニズムは，これに限らない．干渉性の良い電子線を得るために重要なのは，“電界放出” である．これは，金属表面に非常に強い電場をかけて，電子を強引に引っぱり出す．電界放出は量子力学的効果であり，古典的には理解できない．

## 4.3 電界放出電子線

金属表面に強い電場をかけて，内部の電子を引っぱり出す．一体そんなことができるのだろうか？ どの程度の電場をかければ，電子が出てくるだろうか？ 平行な 2 枚の電極間に強い電場をかけると，放電の形で電子が出てくることは既に 20 世紀の初めに分かっていた．しかし，真空が良くない条件での実験だったので，何故電子が出てくるのか分からなかった．

電界放出を行うには避雷針の原理を使えば良い．尖った針の先端には電場が集中して，針先には想像もつかないような強い電場が生じる．例えば，先端の半径 0.1 $\mu$m の針の場合，1000 ボルトかけただけで 1 cm あたり 1000 万ボルト以上の強い電場が生じる．これを平行平板電極で実現しようとしても不可能である．表面をどんなにピカピカに磨いても超高真空にしても，10 万ボルトもかけると放電が始まってしまう．

尖った針を使えば高い電場が生じることを思いつき，電界放出を実際に実現したのは，E.W. ミューラーで，1934 年のことである．ミューラーは，この原理を使って，針先の表面の像を原子的なスケールで観察する顕微鏡を作った．

何故，金属表面に強い電場をかけると内部の電子が出てくるのだろうか？ 熱電子放出の場合と比べて表面の電場は格段に強くなる．強い電場をかけると，表面近傍の真空準位が傾くので，壁は薄くなる（図 4.1 (c)）．しかし壁の高さがフェルミ準位よりも低くなる訳ではないので，電子は出てこないはずである．この現象は古典的には説明ができない．量子力学の完成後に R.H. ファウラーと L.W. ノルドハイムが，そのメカニズムを解明した．

金属表面に強い電場がかかると，壁の厚さは，何と熱電子放出の場合の 1 万分の 1，実に 10 Å 以下にまで薄くなる．金属内部の電子が壁を乗り越えるだけのエネルギーはもっていなくても，電子の波の本性があらわになってきて，電子はトンネル効果[傍注3]によって壁を通り抜けてしまう．あたかも壁にトンネルができたかのような振舞いをする．電子の波長が，10 Å 程度になるので，波動関数の裾野が，外にはみ出してしまうと言ってもよい．

[傍注 3] 金属内部の電子は，波なので壁の中にもしみ込んでしまう．壁が薄いときには，通り抜けて外に出てしまう．量子力学特有の現象である．

電界放出電子は，電子がしみ出てくるような印象だが，これで果たして十分な電流密度が得られるのだろうか？ 熱電子の場合，金属表面での電流密度は 10 $\mathrm{A/cm^2}$ 程度である[傍注4]．これは金属の融ける温度や金属表面にできる空間電荷の効果で抑えられている．ところが，電界放出の場合には，電場をかけるだけで金属を高温にする必要はない．しかも，とてつもなく大きな電場をかけるので，空間電荷による抑制の効果も心配もない．こうして，針の先端での電流密度は 100 万 $\mathrm{A/cm^2}$ にも達する．実に 5 桁も大きくなる．

[傍注 4] $\mathrm{A/cm^2}$ は，1 $\mathrm{cm^2}$ の面積を流れる電流を A（アンペア）で測った電流密度の単位である．

これまでのところ，針先からの電界放出は結構づくめである．常温の針先の点電子源から，極めて明るい電子が放出される．いかにも干渉性に優れていそうである．しかし，もう一つ見逃してはならない点がある．それは，エネルギー分布である．

## 4.4 エネルギー分布

電界放出によって強力な点電子源が得られることが分かったが，いくら明るくても，エネルギーがばらついていては干渉実験にも高分解能実験にも使えない．きれいな干渉縞を得るには，波長が揃っていなければならない．

実は，エネルギー分布という面から見ても，電界放出電子は優れている．金属中の電子は平均して $kT$ （$k$: ボルツマン定数, $T$: 絶対温度）で表せる運動エネルギーをもち，ランダムな運動をしている．この電子が，ランダムな運動をしたまま電界放出で引き出されるが，電子を放出する金属針は室温なので，エネルギーの不揃いは熱電子の場合のおよそ 1/10 と小さい．ただし，電界放出の場合，これがそのまま電子線のエネルギー分布になるわけではない．電界放出の際に生じるエネルギーのばらつきが付け加わる．正確に言うと，フェルミ準位の電子だけが外に引き出される訳ではなく，もっとエネルギーの低い所に

いる電子をも引き出す確率が生じる（図 4.1 (c) 参照）．この現象は電場を強くして壁を薄くするほど，顕著になる．だが，こうした効果を考慮に入れたとしても，通常の条件では熱電子よりもエネルギー幅は小さい．電子を 10 万ボルトまで加速したときの熱電子線は，1〜3 ボルトのエネルギー幅をもつ．これに対して電界放出電子では 0.3 ボルト程度と一桁狭い．

かくして電界放出電子は，極めて明るい点電子源であるという特徴のほかに，エネルギーも揃っていることになる．

## 4.5 干渉性の良い電子線とは

電界放出電子線では，如何にもコントラストの高い明るい干渉縞が得られそうだが，それを定量的に考えておこう．電子の速度（従って波長）が一定の電子は，平面波に対応する（図 4.2）．波長 $\lambda$ が一定でなく，$\lambda$ と $\lambda + \Delta\lambda$ の 2 つの波長の波が重なると，波が局在化し，“ひと固まり” になる．これを “波束” と言う．図 4.2 中の①と②の 2 つの波の山の位置を $z$ 軸の原点で一致させて重ねてみる．重なった波（①の波 + ②の波）は $z = 0$ でピークをもつ波束になる．原点から離れるにつれて波は次第に小さくなり，①と②の 2 つの波の山と谷が重なり合う所が波束の終点となる．

波束の長さ $l$ を求めるのは，難しくない．$l$ の長さの波束の中に①の波の場合に $n$ 個の波長が含まれているとすれば，$l = n\lambda$ である．それに対して波長の長い②の波では，$(n-1)$ 個になるので $l = (n-1)(\lambda + \Delta\lambda)$ となる．この 2 つの式から $n$ を消すと，

$$\frac{l}{\lambda} - \frac{l}{\lambda + \Delta\lambda} = 1 \tag{4.1}$$

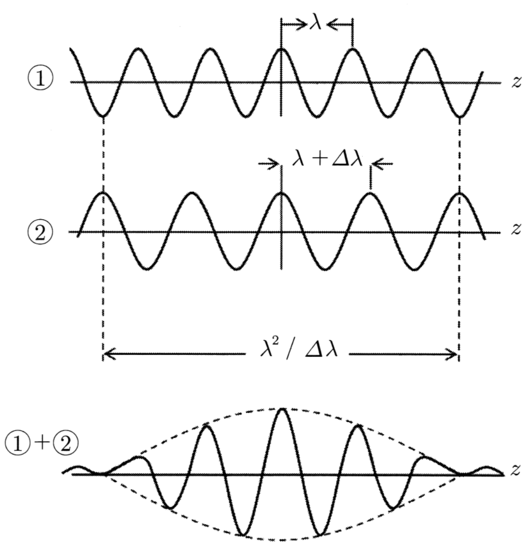



図 4.2　波長の異なった波を重ねてできる波束．

という関係が得られる．$\lambda$ に比べて $\Delta\lambda$ が小さいとすると，

$$l = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = n\lambda, \tag{4.2}$$

$$n = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{4.3}$$

という関係式が得られる．

これらの式の中に，波束に関する重要なことは，全部含まれている．ただし，2つの波を重ねただけでは，ちょっとインチキがある．図 4.2 の図からはずれた左右の部分の波を描いてみるとわかる．同じような波連が $l$ の周期でいくつもできてしまうのである．何のことはない，これは“うなり”である．ところが，これは $\lambda$ と $\lambda + \Delta\lambda$ の波だけではなく，$\lambda$ と $\lambda + \Delta\lambda$ の間の波長の波をもっと増やしていけば，図に描いたもの以外の波束は，みるみる振幅が減ってしまうことになる．

ここで，電子の波束の長さの値を計算してみよう．電界放出電子の場合，電子のエネルギー幅 $\Delta E$ はおよそ 0.3 ボルトである．10 万ボルトに加速した電子線のエネルギーは $E = 100{,}000$（ボルト），波長は $\lambda = 0.037\,\text{Å}$ である．$\Delta\lambda/\lambda = \Delta E/2E$ なる関係を使うと，$\Delta\lambda/\lambda = 1.5 \times 10^{-6}$ となる．したがって，1 個の波束に含まれる波の数 $n$ は，(4.3) 式から $7 \times 10^5$ つまり 70 万になる．そして波束の長さ $l$ は (4.2) 式から $2.4\,\mu\text{m}$ となる．波束の長さとは 1 個の電子の進行方向の波の長さである．

この波束の長さを短いと思う人もいるだろうが，波長の数にすれば，かなり多い．だが，レーザー光に比べれば，ものの数ではない．レーザー光では，何個もの光子の位相が揃って，100 m 以上にもつなげることができる．1 つの波束の中に含まれる波の数は，$2 \times 10^7$ つまり 2000 万以上である．

電子線でも工夫をすれば，レーザーのように波を長くすることができるのだろうか？ エネルギー・フィルターを通して $\Delta E$ を小さくすれば，波束の長さ $l$ は，いくらでも長くすることが可能である．だが問題は，電子線の強度が激減することである．光子のときのように，いくつもの電子の位相を揃えて強度をかせぐことは，そもそも無理な相談である．電子はフェルミ粒子[傍注5]なので，複数の電子の位相を揃えて 1 つの波にすることはできない．光子のようなボース粒子[傍注6]の場合には，いくつもの粒子が同時に同じ状態になり得る．

電子の波の長さの見当はついた．だが，波の横幅はどうだろう？ まさか無限に広いわけではあるまい．海岸に打ち寄せる波でも，横幅は適当なところで途切れている．まして，今は 1 個の電子に対応する波を考えている．そんなに広いとは思えないが，何で決まっているのだろうか？

図 4.2 のときと同じように，理想的な平面波から話を始めよう．平面波の場合，波の進行方向である $z$ 軸に垂直な平面（$x, y$ 平面）上を，中心（の $z$ 軸）からいくら離れてみても平面波のままである．

どのような効果で，波の幅が有限になるのだろうか？ 波束の長さを決めたときには，電子の速度（つまり波長）がばらついているとした[傍注7]（図 4.2）．速

**[傍注 5]** 複数の電子が 1 つの状態に入ることは許されない．“パウリの原理”として知られている．それは電子同士が反撥するからではない．電子のスピンが 1/2（半奇数）で，フェルミ粒子に属するためである．複数個の電子の全体としての波動関数は空間的に反対称にならなければならないことから，2 つ以上の電子が同じ位相をもつことはできない．

**[傍注 6]** 光のスピンは 1（整数）なのでボース粒子に属する．複数の光子の波動関数は対称で，1 つの状態にたくさんの光子が入り得る．低温ではむしろ同じ状態に入ったほうが安定である．最近話題になっているボース・アインシュタイン凝縮では，たくさんの原子を低温にして，1 つの量子力学的状態にすることができる．

**[傍注 7]** 1 個の電子の話をしているので，速度の異なる複数の電子が存在する訳ではない．1 個の電子の速度が不確定さをもっている．

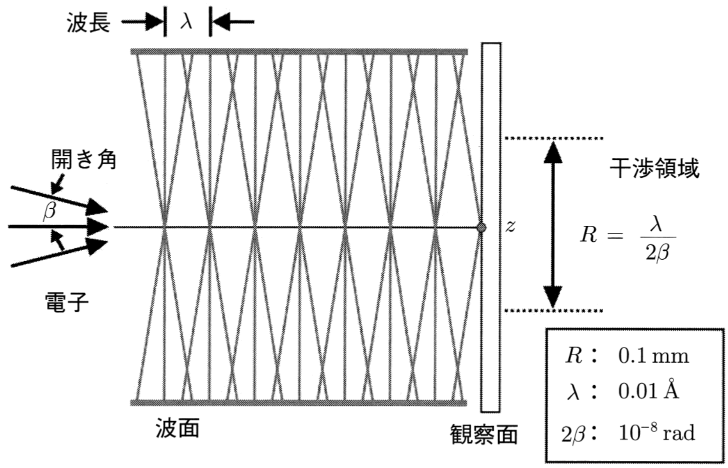



図 4.3　向きの異なった波が作る波束．

度はベクトル量なので，大きさだけでなく方向をもっている．そこで，方向にばらつきがあるという線で考えてみよう．

電子は完全に一方向に向かって進むのではなく，向きにばらつきがあるとする．図 4.3 には，進行方向の異なる 3 つの平面波を描いてある．方向が $\beta$ rad (ラジアン)[傍注 8] だけ異なっているとしよう．3 つの波の波面は $z$ 軸上で一致するようにしてある．$z$ 軸から離れると，3 つの波の波面はだんだんずれて，しまいには波面がどこかが決められなくなる．1 つの波の山が，別の波の谷と重なり合うと，波面が定義できなくなる．波面がどうにか決められる領域の幅 $R$ は図 4.3 に示した通り，簡単な幾何学から，

$$R = \frac{\lambda}{2\beta} \tag{4.4}$$

となる．これも大切な関係式である．例えば，$2\beta$ を $1\times10^{-4}$ rad とすると，10 万ボルトの電子線の波長は $\lambda = 0.037$ Å なので $R = 370$ Å となる．$1\times10^{-4}$ rad という値は，電子顕微鏡の中で，通常，試料を照射する電子線の開き角としては小さめの値であるが，それでも，わずか 370 Å の領域内でしか波面が定義できないことになる．電子顕微鏡では，数本のフレネル縞しか観測できない理由はここにある．だが，原子間隔に比べれば十分広いので，“電子回折”，つまり結晶中の原子で散乱した電子の波が起こす干渉現象は十分に観察できる．

［傍注 8］ rad (ラジアン) は角度の単位である．$2\pi$ rad が 360° に等しい．1 rad はおよそ 60° である．

## 4.6 重要な “輝度” の値

“電子の波束” の長さや幅は，いくらでも大きくできる．エネルギー・フィルターで単色化すれば，波束はいくらでも長くできるし，レンズやピンホールを使って開き角 $\beta$ を小さくすれば幅をいくらでも広げることもできる．長さ，幅，ともに 1 m もある巨大な波束を作ることだって可能である．1 個の電子の波束がそんなに大きくなるのは不思議だが，そんなに大きくすると，電子線の強度

は暗くなってしまうので観測できなくなる．

電子の波の幅を，実際問題として，どれだけ広げることができるのかは大変重要である．この干渉領域の中では，波面がきれいに揃っていて干渉実験も行えるので，その値は大切な量である．

結論を先に言うと，電子線の“輝度”（Brightness）$B$ がそれを決めることになる．輝度は，単位面積（$A$），単位立体角（$\Omega$）[傍注9] あたりの電流 $I$ として定義される．すなわち，

$$B = \frac{I}{(A \cdot \Omega)}. \tag{4.5}$$

電子線の平行度を良くしようと，立体角 $\Omega$ を小さくすると，電流密度（$I/A$）がとたんに減って暗くなってしまう．光学系を工夫して，もっと明るくなる条件が得られないものだろうか？ 単位立体角あたりの電流密度である“輝度”は電子源で決まっており，後からでは，どうにもならない不変量である．

輝度の大きさは，加速電圧に比例するが，それ以外は電子線の通路のどの断面をとっても変わらない．レンズを通しても，絞りを通しても変わらない．この“輝度不変の法則”はリウビユの定理（Liouville's theorem）という力学の基本定理から導き出せる．

電子の状態は位置と運動量で決まるので，それらを座標にもつ位相空間[傍注10]の中の1点として表すことができる．電子の動きは，位相空間内でのその点の動きで表せる．リウビユの定理によれば，電子線の中の“ひと固まり”の電子群は，位相空間のある領域を占め，それが時間とともに移動する．その領域の形は変わっても，その体積は変わらない．これを，電子線に適用すると輝度の不変性が出てくる．例えば，輝度の値は10万ボルトの熱電子線では $5 \times 10^5\,\mathrm{A/cm^2 \cdot ster}$ である．これが電界放出電子線になると $5 \times 10^8\,\mathrm{A/cm^2 \cdot ster}$（実測値）と，3桁も大きくなる．

輝度の値が与えられると，実際に実現し得る波束の幅である干渉領域の長さが求められる．例えば，電子顕微鏡の試料に当てるべき電流密度を $0.01\,\mathrm{A/cm^2}$ としてみよう．これだけの条件を決めただけで試料を照射する電子線の立体角 $\Omega$ が決まってしまうのである．10万ボルトの熱電子線は，輝度が $5 \times 10^5\,\mathrm{A/cm^2 \cdot ster}$ なので，(4.5) 式を使うと $\Omega = 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{ster}$ となる．頂角の立体角 $\Omega$ は，図4.4のような鋭い円錐の場合には $\beta$ が小さいので，$\Omega = \pi\beta^2$ で与えられる．したがって $\beta$ は $8 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad}$ になる．(4.4) 式から波束の幅を求めると 200 Å となる．

［傍注9］ 平面上の角度は rad や度で表す．立体的な角度は ster（ステラジアン）で表す．半径1の球中心から球面上の任意の面積を見た立体角を，球面上の面積の値で表す．そのときの単位が ster である．

［傍注10］ 電子の状態を $(x, p)$ 空間の中で表すことができる．$x$ は電子の座標，$p$ は運動量である．これが位相空間である．3次元空間の場合，位相空間は6次元になる．例えば，古典的な電子が運動をすると，位置も運動量も変化するが，位相空間の中では曲線を描く．量子力学では電子の位置と運動量は同時に確定できないので，1点ではなく小さな体積となり，それが時間的に動いていく．したがって電子線の中の電子たちは，“ひと固まり”の領域となり時間と共に領域の形が変わっていくが，その体積は変化しないというのがリウビユの定理である．

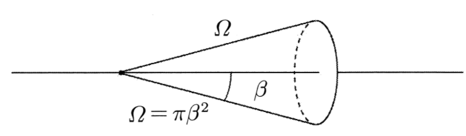



図 4.4　開き角 $\beta$ と立体角 $\Omega$ の関係．小さな立体角 $\Omega$ は，$\Omega = \pi\beta^2$ で近似できる．

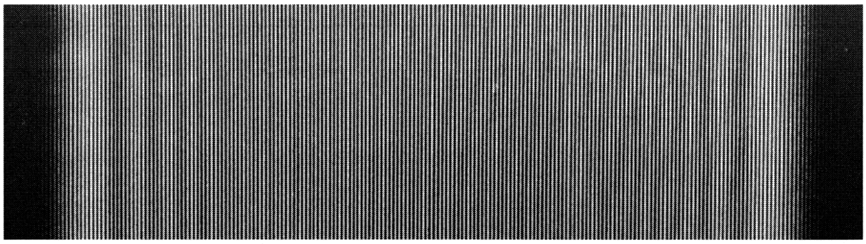


図 4.5　電子線バイプリズム干渉縞の例.

これが電界放出電子線になると，輝度が 1000 倍大きくなるので，干渉領域の長さ 200 Å が一気に 6000 Å までに増加する．電子線バイプリズム[傍注11]を使って干渉縞を得ると，干渉領域は 2 つの領域を重ね合わせるので，3000 Å の幅になる．図 4.5 に示した干渉縞の生じている領域（横幅）に相当する．電子線ホログラフィーでは，干渉領域が，観察できる視野の大きさになるので重要である．少しでも輝度の高い電子線がほしい．2007 年に沖縄大学院大学用に開発した 300 kV 電子顕微鏡では，干渉領域が 100 $\mu$m にまで大きくすることが確認できた．

［傍注 11］　電子線バイプリズムは既に本連載の第 2 回で説明している．中央の細いフィラメントの両側を通る電子線を，フィラメントにプラスの電位をかけて，後方で重ね合わせて干渉縞を作る．6000 Å の可干渉縞距離を持つ電子線が電子線バイプリズムに入射すると，左右 3000 Å ずつの領域を重ね合わせて干渉させることができる．

## 4.7 おわりに

電子線の輝度が高くなると，新しい可能性が拓かれる．観測できる干渉縞の数は増え，干渉縞のコントラストは良くなる．輝度の重要性は電子線に限ったことではない．レーザー光でも，放射光でも同じである．高エネルギー実験では，ビームのルミノシティーが決め手になるが，高エネ研（KEK: 高エネルギー加速器研究機構）ではスタンフォードとの競争に勝った．SPring8 で輝度の高い X 線ビームが開発され，J パークでは強力な中性子線が開発されている．ミクロの世界を探るには，高輝度ビームが必須になる．電子線の場合に特徴的なのは，電子が電荷をもった波であるために，電子の電荷を通して相互作用が行われ，量子力学の世界が見えてくる．

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）



# 物理の道しるべ

## ～研究者の道とは何か～

### 第3回

# 履歴書の裏窓

風間　洋一

新時代における研究者になるためのガイドを展開せよ，ということだが，参考として挙げられている項目に沿って意見や助言を述べることは，私には荷が重い感じがする．そこで考えるに，私ができることは，自分の履歴の中で，素粒子論研究者になるに至ったいきさつの部分を少々披瀝して，そこから幾ばくかの教訓めいたものを引っ張り出すことではないか．その経緯は通常予想されるものからは随分逸脱しているが，このような例もあるという意味で，多少なりとも若い読者の参考になるのではないかと思うのである．

さて，話の手始めに，まず表向きの私の履歴書をざっと述べれば，高校卒業後，京都大学理学部に入学し，物理系を卒業．その後，ニューヨーク州立大学ストーニーブルック校の物理大学院に入り，4年後 Ph.D. の学位を取得．ミシガン大学，フェルミ国立加速器研究所でそれぞれ2年間ポスドク研究員をした後，京都大学理学部助手として帰国．2年後高エネルギー加速器研究所（現高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所）助教授となり，5年半後東京大学助教授に転出．4年後教授となり現在に至る，という具合になる．これだけ見ると，順風満帆，絵に描いたような物理学者の経歴，というように映るかもしれない．しかし，これらの個々の事項は，履歴書という形式によってある意味で「不当」に選ばれてしまった離散的な点であって，それらを直線で結んだ途端，大いなる虚像が出現するのである．特に，多少なりとも物理研究者としての軌道に乗り始める以前の私の歩みの軌跡は，古代人の目に映った惑星の運行のように定かならぬ揺曳に満ちていたと言ってよい．以下に述べるように，私の履歴書をその「裏窓」から眺めれば，随分と違った風景が見えてくるのである．

「風が吹くと桶屋が儲かる」ではないが，私と物理との関わりの淵源を探っていくと，中学時代最初に英語を教わった先生の無類に美しい発音に辿り着く．そのおかげで私はたちまち英語の虜となった．翌年，ニューヨークの高校からきたK先生が英会話の授業を担当してくれることになると，私の英語熱にはさらに拍車がかかり，先生のお宅に押しかけたり，猛特訓をしてもらって英語の弁論大会に出たりするようになった．そのK先生が帰国されてしばらくたったある日，先生から手紙が届いた．父兄の寄付が集まったから，私の高校に1年間来ないか，とある．まさに晴天の霹靂，こんなチャンスは滅多にあるものではない．高校の受験を済ませると直ちに休学して，勇躍ニューヨーク州ロングアイランド島の北岸にあるコールド・スプリング・ハーバー高校に赴いた[*1)]．着い

てからしばらくは，苦闘の連続である．所詮中学生の英語力でアメリカの高校レベルの授業を聞き取り理解するのは辛い．しかし，間もなく私の英語力や学力のレベルが明らかになると，アメリカのシステムの素晴らしい柔軟性が発揮され，私を救ってくれた．科目毎に最適の学年で受講することを認めてくれたのである．英語とフランス語は中学 1 年のクラス，数学は高校 3 年の特別クラスといった具合である．そして高校 2 年レベルに入れられた物理のクラスで，物理に関する私の生涯の恩人の一人となる P 先生に出会う．P 先生はその卓抜明快な授業で物理の真の面白さを私に開示してくれたのみならず，車で 1 時間ほどの距離にあるブルックヘイヴン国立研究所で著名な物理学者の講演があるときには，私を連れて行ってくれ，学問の世界の一端を垣間見させてくれた．無論内容は良くわからなかったが，水爆の父と呼ばれるエドワード・テラーのハンガリー訛りの強い講演などは今でも彷彿と脳裏に浮かんでくる．さらに P 先生は，1 年が過ぎて帰国する折，4 冊の本を私にくださった．そのうちの 3 冊は出版されて間もない『ファインマン物理学』のハードカバー三巻本であり，もう一冊は，P 先生自身の宝物であるディラックの直筆サイン入りの『量子力学』の本であった．いずれにせよ，今に思えば，もし P 先生と出会わなかったなら，私が物理の研究者になる確率は格段に低くなっていたであろうと思う．

1 年間のタイムスリップを経て，郷里の高校に復帰した私を待っていたものは，型にはまった日本の教育システムであった．アメリカで様々な可能性を認める自由な雰囲気を享受してきた私にとって，日本の高校の授業の大半は堅苦しく刺激に欠けていた．まだ早くから大学受験の準備をするという時代ではなかったから，私は多くの時間を授業とは直接関係のない書物を読むことに費やした．物理に関しては，P 先生にもらった『ファインマン物理学』を読み出した．しかし，面白いけれども難しい．物理の先生に質問に行くと，そんなものは今やる必要はないと言われ，意欲を削がれた．英語はある大学教授の家に週一回通って，小説や評論などを精確に読む訓練を受けた．数学に関しても大学の助手の人の手ほどきを受けて多様体論などの本を読んだが，これは正直のところ消化しきれなかった．そして，実は私がもっとも熱中したのは，刊行され始めた『小林秀雄全集』を読むことであり，それに導かれてドストエフスキーの作品群，ランボウや中原中也の詩，などを読み漁ることであった．小林の文章は一般に難解と言われているが，その逆説的論理と飛躍の底にある純真で透徹した感性に魅せられてしまったのである．これはもう病気に罹ったようなものであり，そのため私の成績は一時降下した．

そのうち大学受験が近づいてくると，私は悩み出した．一つは理系に行くか文系に行くかの問題である．理系進学向けのクラスに属していたけれども，上述のように，英語や文学に対する興味も捨てがたかった．もう一つは大学の選択の問題である．教師は強く東大を勧めたが，私の心の中には京都に行ってみたいという気持ちがあった．その背景としては，湯川・朝永の両氏が京都に学んだということと共に，東大は都会的な「官」の匂いがするのに対して，京大には野趣を伴った批判精神が感じられ，後者に惹かれる思いもあった．結局一種日和見的に東大の理 I を目指すことにしたが，しっくりしない淀みが残った．ところが受験も迫ってきたある日，事件が起こった．東大安田講堂が学生に占拠され，その年の東大入試が中止になったのである．それは京大が一気に二倍難しくなるという災難を意味したが，同時に私のもやもやした気持ちを一気に払拭した．

運良く合格し京都に赴いてみると，学生運動の嵐は京都にも吹き荒れ始めていた．入学式に行くと，壇上はあっという間に鉄パイプを持った集団に占拠され，ものの五分も経たぬうちに「粉砕」されてしまった．そしてそれからは，討論やデモや戦闘に明け暮れる毎日が続いた．半年後漸く授業が再開されたが，ストや討論などで休講になるこ

---

*1）ちなみにこの町は，DNA の二重螺旋構造の発見者の一人ジェームズ・ワトソンが長年にわたって所長を務めていた有名な生物学研究所があることで知られる．

とも多く，毎夕8時には退去命令が出た．クラスは第二外国語によって分けられ，私の取ったロシア語のクラスには逸材が数多くいた．なかでも，後にフィールズ賞を受賞することになる森重文氏の数学に関する力は，一頭地を抜いていた．数学に興味を持つ者が集まって，若い数学のI先生に自主ゼミを指導してもらったが，そこでじかに見た彼の天賦の才は異次元のものであった．彼には数学の構造が自然に見透せてしまうようであり，時折我々がなぜわからないのかがわからないという表情をした．I先生には授業でも習ったが，その破天荒な期末試験においても森氏の才は際だっていた．試験時間は午後1時から退去命令時までの7時間，その間，中座して飲食するも可，談合するも可というものであり，問題はそれに見合ったように難解なものばかりであった．森氏は4時頃（むろん全問正解して）静かに出て行ったが，我々凡庸な仲間はその後喫茶店に行って議論（談合）したりして8時まで格闘したのであった．後日I先生は私に数学を志すことを勧めてくれたが，私の中ではすでにその選択肢は完全に消えていた．

そうこうするうちに，私の中には「悪しき性癖」が頭をもたげ始めた．教養課程の授業に面白いものが少なかったことや，英語のサークル活動に時間をつぎ込んだことなどもあって，昼は授業をしばしば欠席し，夜は深更まで下宿で小説や詩を読み耽り，詩の如きものを書きつけ始めた．埴谷雄高の独自な世界と文体に大きな影響を受けると共に，西脇順三郎の超現実主義的な詩や塚本邦雄の前衛的な短歌などに傾倒した．こうした生活の傾向は2年になってサークルの委員長になるとますます顕著になっていった．物理や数学を勉強していなかったわけではないが，私の興味は明らかに別の方向に向かいつつあった．そして，遂に2年の終わり頃，文学部への転学部を真剣に考えるようになる．悩みに悩んだ末に到達した結論は，詩的なものではなく，現実的なものだった．すなわち，私のやりたい文学的な創作活動は，文学部に行けばできるという類のものではない．しかも冷静に考えれば，現時点で創作の修行に賭ける勇気と自信はない．もし仮に将来どうしても創作への希求捨てがたしとなれば，別の職業に就いていても可能なのではないか….

というわけで，数学と文学の選択肢を消し去ってみれば，やはり自分には物理しかないと言うことになった．それでは物理のどの分野を目指すのか．大学2年程度のレベルでは各分野の先端の研究を把握することは困難であり，啓蒙書を読んでみるとか，少し高いレベルの講義を傍聴してみるとか，先輩・友人に聞いてみるとかして，判断するしかない．ここにおいて，私は素粒子論に関して若干偏った情報と印象を得ることになる．まず，サークルの先輩が，「素粒子論をやるには弁証法哲学がいる．武谷三男を読んでみよ.」と言うのである．そこで，『弁証法の諸問題』を読んでみると，自然認識は現象論的段階，実体論的段階，本質論的段階という三つの段階を経て達成される，という有名な「武谷三段階論」が展開されており，それが素粒子論の研究に如何に重要であるかが説いてある．私の感想は，歴史を結果として整理すればそういう構造もあるだろうが，実際の研究はそんなものではないはずだ，という懐疑的なものであった．もう一つ私の素粒子論に対する印象を形成したものは，湯川博士の最終講義であった．最前列に陣取って期待に胸を膨らませて聴講したのだが，博士は胸のマイクがあらぬ方向に向いていることにも頓着せず，しばし窓の外を眺めて思いに沈んだりしながら，よく聞き取れぬ声で講義をされた．内容は，老荘思想と当時研究されていた素領域の理論を絡めたようなものであったと思う．正直のところ私はいささか失望した．それはやはりあまりに「哲学的」であり，自然の極微な構造を具体的に解き明かしていく学問という風には見えなかった．その頃生まれつつあった「生物物理」という分野の響きにも魅力を感じたが，これも講義を傍聴してみると，内容は数理生態学であり，生命の謎に迫るような研究の話ではなかった．

こうした半ば消去法的な過程を経て到達した結論は，物性理論，とりわけ超伝導をその代表とする相転移の理論をやろうということであった．当

時超伝導現象は社会的にも脚光を浴び出していたし，かの有名なBCS理論が出てから日も浅くまだまだ解明すべきことも大いにあるのではないかと思われたのである．そして，三年時の演習では強磁性体の相転移の測定装置を考案して作ったり，イジングモデルの厳密解について勉強したりしながら，徐々に物性理論の世界に触れていった．四年時には温度グリーン関数の考案で有名なM先生の相転移に関する講義を取り，課題研究では化学のS先生のところで物性論のための場の量子論の輪講を大学院生とやるというのでそれに参加したりした．

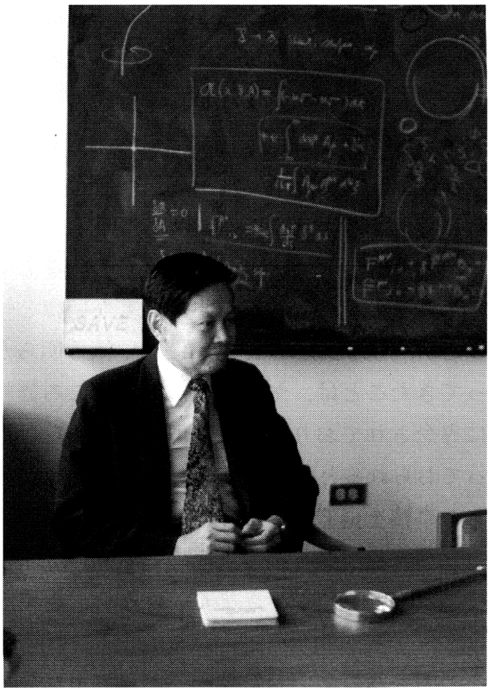
しかしながら，物理の基礎を固める時期に，授業を軽視して，文学書を渉猟したり他の活動に多くの時間を割いたりした「つけ」は思いの外重かったのである．私は見事に大学院の受験に失敗する．物理に専念する気持ちが高まっていただけに，ショックだったが，そこで俄に私の中に湧き起こってきたのは，アメリカに行って出直して見たいという強い願望であった．幸い前掲のP先生が高校の教師からニューヨーク州立大学ストーニーブルック校の教員に転出されていたので相談したところ，ここにはパリティー非保存の法則の発見でノーベル賞を受賞したC.N. Yang（楊振寧）博士がおり，統計物理でも卓越した仕事をしているから，是非来たらどうか，と言う．そこでM先生にヤン先生に就いて統計物理をやるのはどうかと聞いてみると，いいですねえ，と勧めてくれた．という訳で出願の準備を始めたが，TOEFLの受験は期限ぎりぎりだし，GRE[*2)]に至ってはもはや間に合わない．P先生に伝えると，とにかく出願しなさいというので，TOEFLだけ受けて出願した．後にTOEFLの成績の交付も締め切りに間に合わなかったことが判明したが，P先生の強力な推薦のおかげで「超法規的に」ストーニーブルックの大学院に入学を許可されることになった．

こうして，成果上がらずば帰朝せずという不退転の決意をもって，アメリカでの再挑戦を始めた．

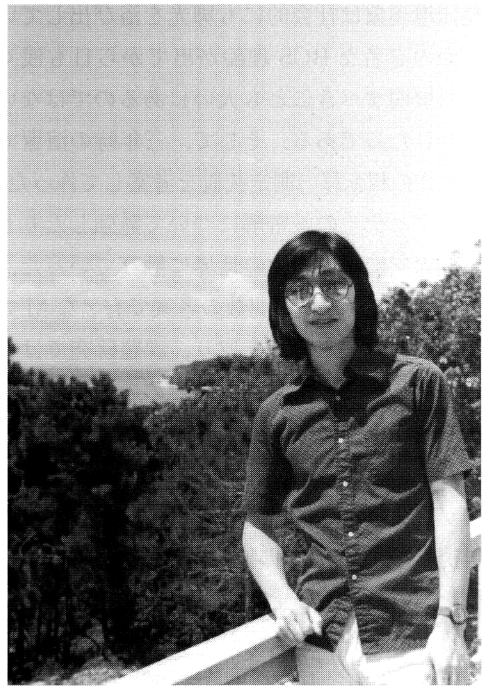
*2)　Graduate Record Examination．アメリカの大学院に入る際要求される共通試験．

アメリカの教育はいわゆるlate specializationに徹しているので，単純に比較すれば日本の教育の進度より遅れており，これが私には幸いした．基本である電磁気学，量子力学，統計力学をもう一度今度は確実に学び直すとともに，一般相対論，固体物理学，場の理論等も受講した．週15時間のティーチング・アシスタントの仕事をこなしながらの生活は，時には食事をする間もないほど忙しかったが，充実していた．ところが，漸う明らかになってきたことは，ヤン先生はこのところ素粒子論に専念されており，統計物理の研究からは遠ざかっておられるという事実であった．M先生はこうした事情を全くご存じなかったと思われる．私は困惑し，超伝導理論の大家のいる別の大学院に転校しようとしたが，うまくいかない．さてそれではどうするか．

その頃受講していた講義の一つは，ヤン先生担当の素粒子物理学であった．これはそれまで私が聞いた講義とは質的に異なるものであり，とりわけ弱い相互作用に関しては，ヤン先生が自身の仕事を語ることすなわちその歴史の重要な部分の再現といった，圧倒的な臨場感があった．それは，素粒子論の研究の実体を開示してくれたのみならず，ヤン先生の偉大さを染みいるように感じさせるものであった．そこにあるのは深く緻密な洞察であり，空虚な形式的「哲学」の臭いは微塵もなかった．私は決断した．この人に就いて素粒子論をやりたい，と．これは分野の一大変更を意味したが，私の直観は，分野よりも人を選べと私に主張した．しかし問題は，滅多に学生を採らないヤン先生にどうやって就くか，である．ヤン先生と初めて言葉を交わす機会は，この講義の期末試験の際に訪れた．試験は口頭で行われ，一人ずつ教室に招じ入れられて，質問を受けるのである．10分くらいで出てくるのがベストと聞かされていたが，5分で出てくる者も，20分経っても出てこない者もいた．入室すると，まず講義で最も興味深かったことを黒板で説明せよと言われ，それが済むと幾つかその他の質問を受けた．緊張したが，ちょうど10分くらいで終わった．あっという間の一年



モノポールについて説明されるヤン先生（自室にて，1976 年）．



ヤン先生宅のデッキにて（1976 年，夏）．

が過ぎ，夏休みに入ると，私は G 先生の RA（リサーチ・アシスタント）として共同研究をさせてもらい，共著で初めて論文というものを書いた．9 月に入り，博士課程進学試験を受けた．筆記に合格すると，面接試験があるのだが，ストーニーブルックでは，その委員を学生自身が指名できるというシステムを採っていた．ヤン先生は厳しいらしく誰も指名しないのだが，私にとってはチャンス到来である．委員の一人になってもらい，面接では主に書いたばかりの論文の話をした．無事合格したので，ヤン先生の部屋を訪れて，弟子にして欲しいと願い出ると，少し時間をくれと言われた．一週間後に伺うと，成績はよろしいが，私は多忙であり，また今は適当なテーマがないから，他の先生をあたるように，と言われた．私は意気消沈し，その後二三の先生のところを回って話を聞いたが，心は晴れず容易に決めることができない．ところが，二週間ほど経ったある日，私のメールボックスにヤン先生からのメモが入っており，部屋に来るようにとある．何事かと訝りながら部屋を尋ねると，最近出た陽子と原子核の特異な散乱実験の結果を説明する幾何学的なアイデアを試してみたい．数値計算も必要になるが，一緒にやるつもりはあるか，というのである．本格的な数値計算はやったことはなかったが，とにかくこの偉大な物理学者に直に接することによって可能な限り学びたいと決意していた私は，一も二もなく受諾した．この研究は長期に渡るコンピューターとの格闘も空しく，期待した結果を与えなかったのだが，私はその間にもヤン先生との対話を通じて，言葉に表し難い刺激を受けた．アイデアの理論的な側面を解析した論文を一つ書いてこの仕事に終止符を打った後，今度は私も非常に興味を持っていた磁気単極子（モノポール）に関する問題の研究に取り組むことになった．ヤン先生がハーバード大学のウー先生と開発されたファイバー束の概念に基づくモノポール理論の枠組みの中で，電子とモノポールの相対論的量子散乱問題を厳密に解こうという試みである．毎週一度ヤン先生の部屋で昼食を取りながら，一週間の間の各々の成果の突き合わせを行うのであるが，教育的に素晴らし

かったのは，ヤン先生が私と同じ歩調で計算を進めてくれたことである．恐らくは私が必死に徹夜も辞さずして計算してきたことを，多忙な日々の合間にやってしまわれたのであろうが，少なくとも私にはこのたぐい希な才能を持った大学者と対等に共同研究しているという錯覚を起こさせてくれたのである．ヤン先生はレポート用紙に鉛筆で計算されるのだが，消しゴムというものを必要とされない．間違うとその部分を鉛筆で訂正されるが，そんなことは滅多にない．それはまさに先生の会話の的確さと同じである．私としゃべるときでさえ，そこには一切の無駄がなく，しゃべることがそのまま整然とした文章となる．そういう具合であるから，三年間先生と接していたにも拘わらず，一度として先生の前で緊張が解けたことはなかった．そうした私の心境を知ってか知らずしてか，ある時先生はこうおっしゃった．「プリンストン高等研究所でアインシュタインと会った時は，随分と緊張したよ．」

モノポールに関する研究は順調に進み，二編の満足すべき論文として結実した．そして，これらをその一部とする私の博士論文も無事審査を通って卒業の運びとなった．私がストーニーブルックを去る直前のある日，ヤン先生は私を部屋に呼んで，私がこれから研究していくうえでの，三つの助言を与えられた．まず言われたことは，「私の真似をするな」，というものであった．一瞬あっけにとられたが，先生は次のように続けられた．「自分は保守的な物理屋である．パリティー非保存の発見にしても，他の可能性をすべて潰した末に，到達したものである．それはそれで一つの方法ではあるが，特に若いうちは大胆に飛躍する考えも持たねばならない*3)．」第二の助言は，「専門家になるな」というものであった．その真意は次のようなものである．「ある分野の専門家でいることは，論文も確実に書けるし，楽なことだ．そうではなく，数年間あることに集中して成果を得たら，また新たな分野に挑戦し，物理の幅を広げよ．」第三の助言は，「10年間は残る仕事をせよ」というものである．これは言うまでもなく，「目先の流行に流されず，長い目でみたときに重要となるものを見極めよ」，ということに他ならない．これらの三つの助言は，以来私の意識の中に，目指すべき目標として常に生き続けることになる．こうして私は，様々な紆余曲折の末，素粒子論研究者の卵として，次なる挑戦の段階に向かったのだが，以下は省略する．

長々と私的な回顧に読者をつきあわせてしまったが，この明らかに模範的ではない私の若い頃の道程の中に読者にとっての何らかのヒントが潜んでいることを願う．蛇足として，私自身の感想と自戒を述べて締めくくりとしよう．若いときに様々なものに興味を持つのは自然なことであり，またその興味の強さはいろいろな契機で変化する．私にとって，文学や英語にのめり込む時期があったことは，確かに物理の勉強を阻害し一時の挫折を招来したが，そこから得たものも決して少なくない．しかしやはり，どこかの時点で，目指すものに対して本気でギヤを入れることが必要であり，私の場合それはアメリカの大学院に入ったときに起こったと言える．そして，そこで決定的に重要であったことは，目標とすべき高いレベルを有形無形の形で示してくれた師に巡り会ったことである．しかし無論それは幸運な契機にすぎない．最後に頼れるものは自分しかいないのであり，自らの感覚，嗅覚，を信じて自分のスタイルを不断に模索追求しなければならないのである．

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）

*3)　このとき先生の脳裏に若い頃のヤン・ミルズ理論の提唱のことがあったかどうかはわからない．

**特　集**（2008 年 9 月号予告）

# トポロジカルな弦の世界

**広がる新しい幾何学像の探求**

本体 952 円

| | |
|---|---|
| トポロジカルな弦理論の 20 年 | 菅野　浩明 |
| Witten–Kontsevich 理論の思いがけない展開 | 村瀬　元彦 |
| 正則アノマリー方程式とミラー対称性 | 細野　忍 |
| 弦理論とホモトピー代数構造 | 梶浦　宏成 |
| 位相的弦理論と特異点理論，行列因子化 | 高橋　篤史 |
| ホモロジー的ミラー対称性 | 植田　一石 |
| リンクホモロジー入門 | 田中　利史 |
| ランダム平面分割の可積分構造 | 中津　了勇 |
| 位相的弦理論とブラックホール | 山口　哲 |
| ［インタビュー］ | 菅野　浩明 |
| 《名著に親しむ》 | 森山　翔文 |

**特　集**（2008 年 7 月号）

# 物理的思考法のすすめ

**諸分野におけるキーポイント**

本体 952 円

| | |
|---|---|
| 物理学と数学 | 藤川　和男 |
| 場の量子論の考え方 | 鈴木　博 |
| 場の理論の対称性 | 九後汰一郎 |
| ゲージ理論の美しさからのヒント | 細谷　裕 |
| 超弦理論の成り立ち | 石橋　延幸 |
| 繰り込み群と臨界現象 | 川上　則雄 |
| 熱力学の基礎概念　エントロピーをめぐって | 佐々　真一 |
| 統計力学の基礎問題　相転移・臨界現象・情報伝達 | 鈴木　増雄 |
| 超伝導のメカニズムをもとめて | 斯波　弘行 |
| ［コラム］言語，経済，社会への物理学的アプローチ | 青山　秀明 |
| ［インタビュー］現代物理の思考法 | 藤川　和男 |
| 《連載》　目で見て学ぶ量子力学　その 3 | 外村　彰 |
| 《数学の道しるべ》　第 2 回 | 黒川　信重 |
| 不思議な素数方陣 | 阿部　楽方 |

## 編集後記

本特集には様々な「数」が登場しますが，中でも私たちの最も身近にある「数」の一つである $\pi$ の値を江戸時代の人が求めようとしていたとは驚きです．また，今月から新連載「視覚の科学と数学」が始まります．視覚メカニズムの解析に数学を用いることができるとは，大変興味深いです．数学の新たなる展開に迫ることができそうです．　（大溝）

＊　＊

今回は久々に数の特集でしたが如何でしたでしょうか．自然の美や宇宙の神秘にも通じる数の奥深さは，人類永遠の謎です．私たちは数に囲まれて生活していますが，実はそんな足元に数の深遠さは潜んでいるのかもしれません．そう言いつつ，眠れぬ夜，羊の数に振り回されて，朝の時計で慌てるこの頃です．　（伊崎）


**数　理　科　学　8月号**

2008 年 8 月 1 日発行　　発行人　木　下　敏　孝

数 理 科 学 編 集 部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平 勢 耕 介　伊 崎 修 通
大 溝 良 平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　© 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)





印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁